

# المعاهم

فى  
الرياضيات البحتة



تأ  
ماهر أحد

تابعنا تيليجرام

<https://t.me/ic33m>

يطلب من دار النشر  
الدعم الفني : ٥٠٠١٣  
والإقتراحات : ٥٣٠  
هاتف : ١٣٠

NATH@Yahoo.com  
أوعلى صفحتنا



# محتويات الكتاب

## أولاً : الجبر

### الوحدة الأولى :

٥	الدرس (١) : المتغيرات والعمليات
٢٤	الدرس (٢) : المعادلات الخطية
٤٧	الدرس (٣) : الأعداد الحقيقية
٥١	الدرس (٤) : المتطابقات
٧٢	الدرس (٥) : المعادلات التربيعية
٨٧	الدرس (٦) : الدوال التربيعية
٩٩	الدرس (٧) : المتطابقات التربيعية

### الوحدة الثانية :

١١٩	الدرس (٨) : المحدد
١٢٩	الدرس (٩) : المقادير
١٤٧	الدرس (١٠) : النهايات

## ثانياً : التفاضل

### الوحدة الثالثة :

١٦٢	الدرس (١١) : معدل التغير
١٧٨	الدرس (١٢) : المشتقات
١٩٩	الدرس (١٣) : قواعد الاشتقاق
٢٥٢	الدرس (١٤) : مشتقة دالة لحد (قاعدة التبسيط)
٢٢٦	الدرس (١٥) : مشتقات الدوال المثلثية
٢٤١	الدرس (١٦) : تطبيقات على المشتقات
٢٥٨	الدرس (١٧) : التكامل

## ثالثاً : حساب المثلثات

### الوحدة الرابعة :

٢٨٠	الدرس (١٨) : الزوايا المرفوعة والمنخفضة
٢٩٥	الدرس (١٩) : الدوال المثلثية لمدى معين
٣١٨	الدرس (٢٠) : الدوال المثلثية لمدى معين
٣٤٢	الدرس (٢١) : صيغة هرمان



# أولاً : الجبر

## الوحدة الأولى :

- الدرس ① : المتتابعات والمتسلسلات .
- الدرس ② : المتكعبة الحسابية .
- الدرس ③ : الأوساط الحسابية .
- الدرس ④ : المتسلسلات الحسابية .
- الدرس ⑤ : المتكعبة الهندسية .
- الدرس ⑥ : الأوساط الهندسية .
- الدرس ⑦ : المتسلسلات الهندسية .

## الوحدة الثانية :

- الدرس ① : مبدأ القيد .
- الدرس ② : القيد الجبري .
- الدرس ③ : التوافيق .







## الدروس

١

### المتتابعات والمتسلسلات

درسنا في السنوات السابقة بعض الأنماط العددية مثل النمط ٢، ٤، ٦، ٨، ... والنمط ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ... ونلاحظ أن النمط العددي هو ترتيب لمجموعة من الأعداد الحقيقية حيث تربط بين كل عدد والعدد الذي يليه علاقة، هذه العلاقة هي التي نوجد عن طريقها حدود هذا النمط أو نوجد حد ما بدون الحاجة إلى معرفة الحدود السابقة له وفي هذه الوحدة سوف نتناول هذه الأنماط بدراسة أكثر عمقا تحت مسمى جديد وهو المتتابعات.

#### تعريف

المتتابعة هي دالة مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة  $\mathbb{N}^+$  أو مجموعة جزئية منها ومدادها مجموعة من الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  حيث يرمز للحد الأول بالرمز  $u_1$  والحد الثاني بالرمز  $u_2$  والحد الثالث بالرمز  $u_3$  وهكذا ... والحد النوني بالرمز  $u_n$  ويمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين كالاتي:

$$(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

ويرمز لها بالرمز  $(u_n)$

فمثلاً المتتابعة  $u_n = 2n + 1$  هي دالة مجالها  $\mathbb{N}^+$

أو لنا نعوض عن  $n$  بالأعداد ١، ٢، ٣، ... ويفتح الحدود  $u_1, u_2, u_3, \dots$



### أي إننا

بالتعويض عن  $u = 1$  ينتج  $ع = 1 + 1 \times 2 = 3$  أي أن الحد الأول هو 3  
وبالتعويض عن  $u = 2$  ينتج  $ع = 1 + 2 \times 2 = 5$  أي أن الحد الثاني هو 5  
وبالتعويض عن  $u = 3$  ينتج  $ع = 1 + 3 \times 2 = 7$  أي أن الحد الثالث هو 7  
لما ع  $u$  فهي الحد العام الذي توجد منه أي حد من خلال التعويض فإذا أردنا إيجاد  
الحد السادس نعوض عن  $u = 6$  ويرمز للحد السادس بالرمز  $ع_6$  وينتج الطريقة  
يمكن إيجاد أي حد ويمكن كتابة المتتابعة بكتابة حدودها بين قوسين هكذا يلي:  
(... 4 7 6 5 3) ويرمز للمتتابعة بالرمز (ع $_n$ )

### ملاحظات هامة

- 1 حدود المتتابعة هي صور عناصر مجال المتابعة.
- 2 لا حظ الفرق بين (ع $_n$ ) حيث (ع $_n$ ) يعبر عن المتتابعة بينما ع يعبر عن حدها التولي.
- 3 يجب أن نفرق بين المتتابعة والمجموعة فالمتتابعة تخضع لترتيب عناصرها (حدودها) أي أن الترتيب له أهمية كبيرة بينما المجموعة لا يهم ترتيب عناصرها.
- 4 عناصر المجموعة لا تتكرر بينما عناصر المتتابعة قد تتكرر.

### المتابعة المنتهية والمنتبعة غير المنتهية

تكون المتتابعة منتهية إذا كان عدد حدودها منتهياً (أو يمكن حصره أو عدّه)  
مثل (1 4 8 6 4 8 2)  
وتكون المتتابعة غير منتهية إذا كان عدد حدودها غير منته (أو عدد لا نهائي من الحدود)  
مثل (... 6 5 4 3 1)

### مثال

أكتب كلاً من المتتابعات التي حدها التولي يعطى بالعلاقة:

- 1  $ع_n = 1 + 2u$  (أي خمسة حدود ابتداء من الحد الأول)
- 2  $ع_n = 2u$  (أي عدد غير منته من الحدود ابتداء من الحد الأول)

### الحل

① يوضع  $u = 1$  في  $ع = 1 + 2 \times 1 = 3$

$$ع = 1 + (1) 2 = 3 \quad \text{و} \quad ع = 1 + (2) 2 = 5$$



$$9 = 1 + (4)2 = 9$$

$$7 = 1 + (3)2 = 7$$

$$11 = 1 + (5)2 = 11$$

∴ المتتابة هي (١١٤٩٤٧٤٥٤٣) متتابة منتهية.

② بوضع  $u = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$$1 = {}^2(1) = 1$$

$$1 = {}^2(1) = 1$$

$$9 = {}^2(3) = 9$$

$$9 = {}^2(3) = 9$$

$$25 = {}^2(5) = 25$$

∴ المتتابة هي (١٤٩٤٧٤٥٤٣) متتابة غير منتهية.

### الحد العام للمتتابة

الحد العام للمتتابة (ويسمى أحياناً بالحد الفوقي) يكتب  $u_n$  حيث  $n$  صورة العنصر الذي ترقبه  $n$  في مجال المتتابة ويمكن إستنتاجه أحياناً من خلال حدود معطاة للمتتابة.

### أمثلة

الحد العام للمتتابة الأعداد الزوجية:  $2, 4, 6, 8, \dots$  هو  $u_n = 2n$

الحد العام للمتتابة الأعداد الفردية:  $1, 3, 5, 7, \dots$  هو  $u_n = 2n - 1$

الحد العام للمتتابة:  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$  هو  $u_n = \frac{1}{n+2}$

### مثال ٢

اكتب الحدود الخمسة الأولى وكذلك الحد العام للمتتابة ( $u_n$ )

المعرفة كالآتي:  $u_1 = 1, u_2 = 1 + u_1$  حيث  $n \leq 1$

### الحل

بالتعويض عن قيمة  $u = 1, 2, 3, 4, 5$

في العلاقة  $u_n = 1 + u_{n-1}$

بوضع  $n = 1$

$$u_1 = 1 = 1 + u_0$$

بوضع  $n = 2$

$$(u_2 = 1 + u_1)$$

$$u_2 = 2 = 1 + 1$$

$$\therefore u_2 = 2$$

$$(u_3 = 1 + u_2)$$

$$\therefore u_3 = 3$$

$$\therefore u_3 = 3$$

$$(u_4 = 1 + u_3)$$

$$\therefore u_4 = 4$$

$$\therefore u_4 = 4$$

$$(u_5 = 1 + u_4)$$

$$\therefore u_5 = 5$$

$$\therefore u_5 = 5$$

$$(u_6 = 1 + u_5)$$

$$\therefore u_6 = 6$$

$$\therefore u_6 = 6$$

$$(u_7 = 1 + u_6)$$

$$\therefore u_7 = 7$$

$$\therefore u_7 = 7$$

$$(u_8 = 1 + u_7)$$

$$\therefore u_8 = 8$$

$$\therefore u_8 = 8$$

$$(u_9 = 1 + u_8)$$

$$\therefore u_9 = 9$$

$$\therefore u_9 = 9$$

$$(u_{10} = 1 + u_9)$$

$$\therefore u_{10} = 10$$

$$\therefore u_{10} = 10$$

$$(u_{11} = 1 + u_{10})$$

$$\therefore u_{11} = 11$$

$$\therefore u_{11} = 11$$

$$(u_{12} = 1 + u_{11})$$

$$\therefore u_{12} = 12$$

$$\therefore u_{12} = 12$$

$$(u_{13} = 1 + u_{12})$$

$$\therefore u_{13} = 13$$

$$\therefore u_{13} = 13$$

$$(u_{14} = 1 + u_{13})$$

$$\therefore u_{14} = 14$$

$$\therefore u_{14} = 14$$

$$(u_{15} = 1 + u_{14})$$

$$\therefore u_{15} = 15$$

$$\therefore u_{15} = 15$$

$$(u_{16} = 1 + u_{15})$$

$$\therefore u_{16} = 16$$

$$\therefore u_{16} = 16$$

$$(u_{17} = 1 + u_{16})$$

$$\therefore u_{17} = 17$$

$$\therefore u_{17} = 17$$

$$(u_{18} = 1 + u_{17})$$

$$\therefore u_{18} = 18$$

$$\therefore u_{18} = 18$$

$$(u_{19} = 1 + u_{18})$$

$$\therefore u_{19} = 19$$

$$\therefore u_{19} = 19$$

$$(u_{20} = 1 + u_{19})$$

$$\therefore u_{20} = 20$$

$$\therefore u_{20} = 20$$

$$(u_{21} = 1 + u_{20})$$

$$\therefore u_{21} = 21$$

$$\therefore u_{21} = 21$$

$$(u_{22} = 1 + u_{21})$$

$$\therefore u_{22} = 22$$

$$\therefore u_{22} = 22$$

$$(u_{23} = 1 + u_{22})$$

$$\therefore u_{23} = 23$$

$$\therefore u_{23} = 23$$

$$(u_{24} = 1 + u_{23})$$

$$\therefore u_{24} = 24$$

$$\therefore u_{24} = 24$$

$$(u_{25} = 1 + u_{24})$$

$$\therefore u_{25} = 25$$

$$\therefore u_{25} = 25$$

$$(u_{26} = 1 + u_{25})$$

$$\therefore u_{26} = 26$$

$$\therefore u_{26} = 26$$

$$(u_{27} = 1 + u_{26})$$

$$\therefore u_{27} = 27$$

$$\therefore u_{27} = 27$$

$$(u_{28} = 1 + u_{27})$$

$$\therefore u_{28} = 28$$

$$\therefore u_{28} = 28$$

$$(u_{29} = 1 + u_{28})$$

$$\therefore u_{29} = 29$$

$$\therefore u_{29} = 29$$

$$(u_{30} = 1 + u_{29})$$

$$\therefore u_{30} = 30$$

$$\therefore u_{30} = 30$$

$$(u_{31} = 1 + u_{30})$$

$$\therefore u_{31} = 31$$

$$\therefore u_{31} = 31$$

$$(u_{32} = 1 + u_{31})$$

$$\therefore u_{32} = 32$$

$$\therefore u_{32} = 32$$

$$(u_{33} = 1 + u_{32})$$

$$\therefore u_{33} = 33$$

$$\therefore u_{33} = 33$$

$$(u_{34} = 1 + u_{33})$$

$$\therefore u_{34} = 34$$

$$\therefore u_{34} = 34$$

$$(u_{35} = 1 + u_{34})$$

$$\therefore u_{35} = 35$$

$$\therefore u_{35} = 35$$

$$(u_{36} = 1 + u_{35})$$

$$\therefore u_{36} = 36$$

$$\therefore u_{36} = 36$$

$$(u_{37} = 1 + u_{36})$$

$$\therefore u_{37} = 37$$

$$\therefore u_{37} = 37$$

$$(u_{38} = 1 + u_{37})$$

$$\therefore u_{38} = 38$$

$$\therefore u_{38} = 38$$

$$(u_{39} = 1 + u_{38})$$

$$\therefore u_{39} = 39$$

$$\therefore u_{39} = 39$$

$$(u_{40} = 1 + u_{39})$$

$$\therefore u_{40} = 40$$

$$\therefore u_{40} = 40$$

$$(u_{41} = 1 + u_{40})$$

$$\therefore u_{41} = 41$$

$$\therefore u_{41} = 41$$

$$(u_{42} = 1 + u_{41})$$

$$\therefore u_{42} = 42$$

$$\therefore u_{42} = 42$$

$$(u_{43} = 1 + u_{42})$$

$$\therefore u_{43} = 43$$

$$\therefore u_{43} = 43$$

$$(u_{44} = 1 + u_{43})$$

$$\therefore u_{44} = 44$$

$$\therefore u_{44} = 44$$

$$(u_{45} = 1 + u_{44})$$

$$\therefore u_{45} = 45$$

$$\therefore u_{45} = 45$$

$$(u_{46} = 1 + u_{45})$$

$$\therefore u_{46} = 46$$

$$\therefore u_{46} = 46$$

$$(u_{47} = 1 + u_{46})$$

$$\therefore u_{47} = 47$$

$$\therefore u_{47} = 47$$

$$(u_{48} = 1 + u_{47})$$

$$\therefore u_{48} = 48$$

$$\therefore u_{48} = 48$$

$$(u_{49} = 1 + u_{48})$$

$$\therefore u_{49} = 49$$

$$\therefore u_{49} = 49$$

$$(u_{50} = 1 + u_{49})$$

$$\therefore u_{50} = 50$$

$$\therefore u_{50} = 50$$

$$(u_{51} = 1 + u_{50})$$

$$\therefore u_{51} = 51$$

$$\therefore u_{51} = 51$$

$$(u_{52} = 1 + u_{51})$$

$$\therefore u_{52} = 52$$

$$\therefore u_{52} = 52$$

$$(u_{53} = 1 + u_{52})$$

$$\therefore u_{53} = 53$$

$$\therefore u_{53} = 53$$

$$(u_{54} = 1 + u_{53})$$

$$\therefore u_{54} = 54$$

$$\therefore u_{54} = 54$$

$$(u_{55} = 1 + u_{54})$$

$$\therefore u_{55} = 55$$

$$\therefore u_{55} = 55$$

$$(u_{56} = 1 + u_{55})$$

$$\therefore u_{56} = 56$$

$$\therefore u_{56} = 56$$

$$(u_{57} = 1 + u_{56})$$

$$\therefore u_{57} = 57$$

$$\therefore u_{57} = 57$$

$$(u_{58} = 1 + u_{57})$$

$$\therefore u_{58} = 58$$

$$\therefore u_{58} = 58$$

$$(u_{59} = 1 + u_{58})$$

$$\therefore u_{59} = 59$$

$$\therefore u_{59} = 59$$

$$(u_{60} = 1 + u_{59})$$

$$\therefore u_{60} = 60$$

$$\therefore u_{60} = 60$$

$$(u_{61} = 1 + u_{60})$$

$$\therefore u_{61} = 61$$

$$\therefore u_{61} = 61$$

$$(u_{62} = 1 + u_{61})$$

$$\therefore u_{62} = 62$$

$$\therefore u_{62} = 62$$

$$(u_{63} = 1 + u_{62})$$

$$\therefore u_{63} = 63$$

$$\therefore u_{63} = 63$$

$$(u_{64} = 1 + u_{63})$$

$$\therefore u_{64} = 64$$

$$\therefore u_{64} = 64$$

$$(u_{65} = 1 + u_{64})$$

$$\therefore u_{65} = 65$$

$$\therefore u_{65} = 65$$

$$(u_{66} = 1 + u_{65})$$







## مثال

نفس أيا من المتتاليات (ع) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك:

$$\textcircled{1} \text{ ع } 1 + 2 = \text{ع} \quad \textcircled{2} \text{ ع } \frac{1}{1 - 2} = \text{ع} \quad \textcircled{3} \text{ ع } 3 + \frac{2(1-)}{2} = \text{ع}$$

## الحل

نوجد ع<sub>1</sub>، ع<sub>2</sub> ثم نجد ع<sub>3</sub> - ع<sub>1</sub> + ع<sub>2</sub>

إذا كان الناتج <، تكون المتتالية تزايدية وإذا كان الناتج >، تكون المتتالية تناقصية

$$\textcircled{1} \text{ ع } 1 + 2 = \text{ع} \quad 3 + 2 = 1 + 2 + 2 = 1 + (1 + 2) 2 = \text{ع} + 2$$

$$2 = 1 - 2 - 3 + 2 = (1 + 2) - 3 + 2 = \text{ع} - 1 + \text{ع}$$

∴ ع<sub>1</sub> < ع<sub>2</sub> لأن الناتج أكبر من صفر

∴ المتتالية تزايدية لجميع قيم ن

$$\textcircled{2} \text{ ع } 1 + 2 = \text{ع} \quad \frac{1}{1 - 2} = \text{ع} \quad \frac{1}{1 + 2} = \frac{1}{1 - 2 + 2} = \frac{1}{1 - (1 + 2) 2} = \text{ع} + 2$$

$$\frac{2 -}{(1 - 2)(1 + 2)} = \frac{1 - 2 - 1 - 2}{(1 - 2)(1 + 2)} = \frac{1}{1 - 2} - \frac{1}{1 + 2} = \text{ع} - 1 + \text{ع}$$

∴ ع<sub>1</sub> > ع<sub>2</sub> لأن الناتج أصغر من صفر

∴ المتتالية تناقصية لجميع قيم ن

$$\textcircled{3} \text{ ع } 3 + \frac{2(1-)}{2} = \text{ع} \quad 3 + \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} = \text{ع} + 2$$

$$\frac{2(1-)}{2} - \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} = 3 - \frac{2(1-)}{2} - 3 + \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} = \text{ع} - 1 + \text{ع}$$

$$\left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + 2} \right]^{1 + 2} (1 -) = \frac{1 + 2(1-)}{2} + \frac{1 + 2(1-)}{1 + 2} =$$

$$\left( \frac{1 + 2}{(1 + 2) 2} \right)^{1 + 2} (1 -) = \left[ \frac{(1 + 2) + 2}{(1 + 2) 2} \right]^{1 + 2} (1 -) =$$

وهذا المقدار موجب عندما ن عدد فردي وسالب عندما ن عدد زوجي أي أن المتتالية

ليست تزايدية وليست تناقصية.



### ٥ المتسلسلات ورمز التجميع

المتسلسلة هي عملية جمع حدود المتتابعة **أمثلة** (١٠٨٤٦٤٤٢) هي متتابعة تتكون من خمسة حدود بينما المتسلسلة هي عملية جمع لهذه الحدود.  
أو أن ١٠ + ٨ + ٦ + ٤ + ٢ هي المتسلسلة المرتبطة بالمتتابعة السابقة وذلك بوضع إشارة الجمع بين حدود المتتابعة ويمكن استخدام رمز التجميع «  $\Sigma$  » ويقرأ «سيجما» لكتابة المتسلسلات بصورة مختصرة.

#### فمثلاً

المتسلسلة السابقة تتكون من جمع الحدود الخمسة للمتتابعة وتكتب باستخدام رمز التجميع بالصورة  $\sum_{i=1}^5 x_i$  وهي تعني  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ .  
ومن ذلك يمكن تعريف المتسلسلة المنتهية والمتسلسلة غير المنتهية كما يلي:

### المتسلسلة المنتهية

تكتب بالصورة:  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$  حيث  $n$  عدد صحيح موجب،  $x_n$  هو الحد الذي ترتيبه  $n$  في المتسلسلة وتسمى القيمة العددية للمتسلسلة المنتهية بمجموع حدود المتتابعة المناظرة ففي المتسلسلة المنتهية  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$  يمكن كتابتها بالصورة  $\sum_{i=1}^n (x_i)$  وتقرأ مجموع  $x_i$  من  $i=1$  إلى  $i=n$ .

**أي أن** مجموع كل حدود المتتابعة المنتهية يسمى متسلسلة منتهية والقيمة العددية للمتسلسلة هي مجموع حدود المتتابعة المناظرة.

ويمكن إيجاد مجموع مكوّنات المتسلسلة  $\sum_{i=1}^3 x_i$  كما يلي:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3 = 1 + 2 + 3 = 6 = \sum_{i=1}^3 (x_i)$$

### المتسلسلة غير المنتهية

المتسلسلة غير المنتهية لا يمكن حصر عدد حدودها فمثلاً المتسلسلة  $2 + 4 + 8 + 16 + \dots$  تكتب بالصورة  $\sum_{i=1}^{\infty} (2^i)$  وقد استخدم الرمز  $\infty$  ليدل على ذلك.



## ⑤ خواص الجبرية لجميع

إذا كانت  $(r, s)$  متابعتين،  $u \exists v \exists w \exists x \exists y$  فإن:

خاصية ١	فمثلاً
$r \oplus s = s \oplus r$	$v_1 = 1 \times 7 = 7 \frac{1}{10}$
خاصية ٢	أو أن:
$\frac{(1+u)u}{2} = r \frac{u}{10}$	$v_2 = \frac{(1+7)7}{2} = \frac{(1+u)u}{2} = r \frac{u}{10}$
خاصية ٣	فمثلاً
$r \frac{u}{10} \oplus s \frac{u}{10} = r \frac{u}{10} \oplus s \frac{u}{10}$	$v_3 = \frac{(1+7)7}{2} \times 2 = r \frac{u}{10} \oplus s \frac{u}{10} = r \frac{u}{10} \oplus s \frac{u}{10}$
خاصية ٤	فمثلاً
$\frac{(1+u^2)(1+u)u}{2} = r \frac{u}{10}$	$v_{14} = \frac{(1+8 \times 2)(1+8)8}{2} = r \frac{8}{10}$
خاصية ٥	فمثلاً
$r \frac{u}{10} \oplus s \frac{u}{10} = (r \oplus s) \frac{u}{10}$	$r \frac{8}{10} \oplus 2 \frac{8}{10} = (r \oplus 2) \frac{8}{10}$
	$\frac{(1+8)8}{2} \times 2 + \frac{(1+8 \times 2)(1+8)8}{2} =$
	$276 = 72 + 204 =$

### ملاحظة

جميع خواص الجبرية السابقة لرمز التجميع لا تستخدم إلا في حالة إيجاد مجموع المتابعة بدءاً من الحد الأول أي لإيجاد  $r \frac{u}{10}$



ننظر أن نحل إلى بعض النتائج من هذه الحواص منها ،

### ١٠ مجموع الأعداد الزوجية

مجموع الأعداد الزوجية =  $2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n$

$$(1+n)u = \frac{(1+u)u}{2} \times 2 - \sqrt{\sum_{i=1}^n 2} = \sqrt{2} \sum_{i=1}^n 1$$

أي أن مجموع الأعداد الزوجية إلى  $n$  حدًا =  $(1+n)u$

### ١١ مجموع الأعداد الفردية

مجموع الأعداد الفردية =  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$

$$1 \sum_{i=1}^n 1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n 2} = (1-\sqrt{2}) \sum_{i=1}^n 1 =$$

$$1u = u - u + 2u = u \times 1 - \frac{(1+u)u}{2} \times 2 =$$

أي أن مجموع الأعداد الفردية إلى  $n$  حدًا =  $1u$

### مثال ١

اكتب كلاً من المتسلسلات الآتية ثم أوجد مجموع المفكوك :

$$1 \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} \quad 2 \sum_{i=1}^n (1+\sqrt{2}) \quad 3 \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{1+\sqrt{2}} \right)$$

### الحل

① بوضع  $r=1$  يكون  $1 = 1$  ، بوضع  $r=2$  يكون  $2 = 2$  ، بوضع  $r=3$  يكون  $4 = 4$  ، بوضع  $r=4$  يكون  $8 = 8$  ، بوضع  $r=5$  يكون  $16 = 16$  ، بوضع  $r=6$  يكون  $32 = 32$  ، بوضع  $r=7$  يكون  $64 = 64$  ، بوضع  $r=8$  يكون  $128 = 128$  ، بوضع  $r=9$  يكون  $256 = 256$  ، بوضع  $r=10$  يكون  $512 = 512$  ، بوضع  $r=11$  يكون  $1024 = 1024$  ، بوضع  $r=12$  يكون  $2048 = 2048$  ، بوضع  $r=13$  يكون  $4096 = 4096$  ، بوضع  $r=14$  يكون  $8192 = 8192$  ، بوضع  $r=15$  يكون  $16384 = 16384$  ، بوضع  $r=16$  يكون  $32768 = 32768$  ، بوضع  $r=17$  يكون  $65536 = 65536$  ، بوضع  $r=18$  يكون  $131072 = 131072$  ، بوضع  $r=19$  يكون  $262144 = 262144$  ، بوضع  $r=20$  يكون  $524288 = 524288$  ، بوضع  $r=21$  يكون  $1048576 = 1048576$  ، بوضع  $r=22$  يكون  $2097152 = 2097152$  ، بوضع  $r=23$  يكون  $4194304 = 4194304$  ، بوضع  $r=24$  يكون  $8388608 = 8388608$  ، بوضع  $r=25$  يكون  $16777216 = 16777216$  ، بوضع  $r=26$  يكون  $33554432 = 33554432$  ، بوضع  $r=27$  يكون  $67108864 = 67108864$  ، بوضع  $r=28$  يكون  $134217728 = 134217728$  ، بوضع  $r=29$  يكون  $268435456 = 268435456$  ، بوضع  $r=30$  يكون  $536870912 = 536870912$  ، بوضع  $r=31$  يكون  $1073741824 = 1073741824$  ، بوضع  $r=32$  يكون  $2147483648 = 2147483648$  ، بوضع  $r=33$  يكون  $4294967296 = 4294967296$  ، بوضع  $r=34$  يكون  $8589934592 = 8589934592$  ، بوضع  $r=35$  يكون  $17179869184 = 17179869184$  ، بوضع  $r=36$  يكون  $34359738368 = 34359738368$  ، بوضع  $r=37$  يكون  $68719476736 = 68719476736$  ، بوضع  $r=38$  يكون  $137438953472 = 137438953472$  ، بوضع  $r=39$  يكون  $274877906944 = 274877906944$  ، بوضع  $r=40$  يكون  $549755813888 = 549755813888$  ، بوضع  $r=41$  يكون  $1099511627776 = 1099511627776$  ، بوضع  $r=42$  يكون  $2199023255552 = 2199023255552$  ، بوضع  $r=43$  يكون  $4398046511104 = 4398046511104$  ، بوضع  $r=44$  يكون  $8796093022208 = 8796093022208$  ، بوضع  $r=45$  يكون  $17592186044416 = 17592186044416$  ، بوضع  $r=46$  يكون  $35184372088832 = 35184372088832$  ، بوضع  $r=47$  يكون  $70368744177664 = 70368744177664$  ، بوضع  $r=48$  يكون  $140737488355328 = 140737488355328$  ، بوضع  $r=49$  يكون  $281474976710656 = 281474976710656$  ، بوضع  $r=50$  يكون  $562949953421312 = 562949953421312$  ، بوضع  $r=51$  يكون  $1125899906842624 = 1125899906842624$  ، بوضع  $r=52$  يكون  $2251799813685248 = 2251799813685248$  ، بوضع  $r=53$  يكون  $4503599627370496 = 4503599627370496$  ، بوضع  $r=54$  يكون  $9007199254740992 = 9007199254740992$  ، بوضع  $r=55$  يكون  $18014398509481984 = 18014398509481984$  ، بوضع  $r=56$  يكون  $36028797018963968 = 36028797018963968$  ، بوضع  $r=57$  يكون  $72057594037927936 = 72057594037927936$  ، بوضع  $r=58$  يكون  $144115188075855872 = 144115188075855872$  ، بوضع  $r=59$  يكون  $288230376151711744 = 288230376151711744$  ، بوضع  $r=60$  يكون  $576460752303423488 = 576460752303423488$  ، بوضع  $r=61$  يكون  $1152921504606846976 = 1152921504606846976$  ، بوضع  $r=62$  يكون  $2305843009213693952 = 2305843009213693952$  ، بوضع  $r=63$  يكون  $4611686018427387904 = 4611686018427387904$  ، بوضع  $r=64$  يكون  $9223372036854775808 = 9223372036854775808$  ، بوضع  $r=65$  يكون  $18446744073709551616 = 18446744073709551616$  ، بوضع  $r=66$  يكون  $36893488147419103232 = 36893488147419103232$  ، بوضع  $r=67$  يكون  $73786976294838206464 = 73786976294838206464$  ، بوضع  $r=68$  يكون  $147573952589676412928 = 147573952589676412928$  ، بوضع  $r=69$  يكون  $295147905179352825856 = 295147905179352825856$  ، بوضع  $r=70$  يكون  $590295810358705651712 = 590295810358705651712$  ، بوضع  $r=71$  يكون  $1180591620717411303424 = 1180591620717411303424$  ، بوضع  $r=72$  يكون  $2361183241434822606848 = 2361183241434822606848$  ، بوضع  $r=73$  يكون  $4722366482869645213696 = 4722366482869645213696$  ، بوضع  $r=74$  يكون  $9444732965739290427392 = 9444732965739290427392$  ، بوضع  $r=75$  يكون  $18889465931478580854784 = 18889465931478580854784$  ، بوضع  $r=76$  يكون  $37778931862957161709568 = 37778931862957161709568$  ، بوضع  $r=77$  يكون  $75557863725914323419136 = 75557863725914323419136$  ، بوضع  $r=78$  يكون  $151115727451828646838272 = 151115727451828646838272$  ، بوضع  $r=79$  يكون  $302231454903657293676544 = 302231454903657293676544$  ، بوضع  $r=80$  يكون  $604462909807314587353088 = 604462909807314587353088$  ، بوضع  $r=81$  يكون  $1208925819614629174706176 = 1208925819614629174706176$  ، بوضع  $r=82$  يكون  $2417851639229258349412352 = 2417851639229258349412352$  ، بوضع  $r=83$  يكون  $4835703278458516698824704 = 4835703278458516698824704$  ، بوضع  $r=84$  يكون  $9671406556917033397649408 = 9671406556917033397649408$  ، بوضع  $r=85$  يكون  $19342813113834066795298816 = 19342813113834066795298816$  ، بوضع  $r=86$  يكون  $38685626227668133590597632 = 38685626227668133590597632$  ، بوضع  $r=87$  يكون  $77371252455336267181195264 = 77371252455336267181195264$  ، بوضع  $r=88$  يكون  $154742504910672534362390528 = 154742504910672534362390528$  ، بوضع  $r=89$  يكون  $309485009821345068724781056 = 309485009821345068724781056$  ، بوضع  $r=90$  يكون  $618970019642690137449562112 = 618970019642690137449562112$  ، بوضع  $r=91$  يكون  $1237940039285380274899124224 = 1237940039285380274899124224$  ، بوضع  $r=92$  يكون  $2475880078570760549798248448 = 2475880078570760549798248448$  ، بوضع  $r=93$  يكون  $4951760157141521099596496896 = 4951760157141521099596496896$  ، بوضع  $r=94$  يكون  $9903520314283042199192993792 = 9903520314283042199192993792$  ، بوضع  $r=95$  يكون  $19807040628566084398385987584 = 19807040628566084398385987584$  ، بوضع  $r=96$  يكون  $39614081257132168796771975168 = 39614081257132168796771975168$  ، بوضع  $r=97$  يكون  $79228162514264337593543950336 = 79228162514264337593543950336$  ، بوضع  $r=98$  يكون  $158456325028528675187087900672 = 158456325028528675187087900672$  ، بوضع  $r=99$  يكون  $316912650057057350374175801344 = 316912650057057350374175801344$  ، بوضع  $r=100$  يكون  $633825300114114700748351602688 = 633825300114114700748351602688$  ، بوضع  $r=101$  يكون  $1267650600228229401496703205376 = 1267650600228229401496703205376$  ، بوضع  $r=102$  يكون  $2535301200456458802993406410752 = 2535301200456458802993406410752$  ، بوضع  $r=103$  يكون  $5070602400912917605986812821504 = 5070602400912917605986812821504$  ، بوضع  $r=104$  يكون  $10141204801825835211973625643008 = 10141204801825835211973625643008$  ، بوضع  $r=105$  يكون  $20282409603651670423947251286016 = 20282409603651670423947251286016$  ، بوضع  $r=106$  يكون  $40564819207303340847894502572032 = 40564819207303340847894502572032$  ، بوضع  $r=107$  يكون  $81129638414606681695789005144064 = 81129638414606681695789005144064$  ، بوضع  $r=108$  يكون  $162259276829213363391578010288128 = 162259276829213363391578010288128$  ، بوضع  $r=109$  يكون  $324518553658426726783156020576256 = 324518553658426726783156020576256$  ، بوضع  $r=110$  يكون  $649037107316853453566312041152512 = 649037107316853453566312041152512$  ، بوضع  $r=111$  يكون  $1298074214633706907132624082305024 = 1298074214633706907132624082305024$  ، بوضع  $r=112$  يكون  $2596148429267413814265248164610048 = 2596148429267413814265248164610048$  ، بوضع  $r=113$  يكون  $5192296858534827628530496329220096 = 5192296858534827628530496329220096$  ، بوضع  $r=114$  يكون  $10384593717069655257060992658440192 = 10384593717069655257060992658440192$  ، بوضع  $r=115$  يكون  $20769187434139310514121985316880384 = 20769187434139310514121985316880384$  ، بوضع  $r=116$  يكون  $41538374868278621028243970633760768 = 41538374868278621028243970633760768$  ، بوضع  $r=117$  يكون  $83076749736557242056487941267521536 = 83076749736557242056487941267521536$  ، بوضع  $r=118$  يكون  $166153499473114484112975882535043072 = 166153499473114484112975882535043072$  ، بوضع  $r=119$  يكون  $332306998946228968225951765070086144 = 332306998946228968225951765070086144$  ، بوضع  $r=120$  يكون  $664613997892457936451903530140172288 = 664613997892457936451903530140172288$  ، بوضع  $r=121$  يكون  $1329227995784915872903807060280344576 = 1329227995784915872903807060280344576$  ، بوضع  $r=122$  يكون  $2658455991569831745807614120560689152 = 2658455991569831745807614120560689152$  ، بوضع  $r=123$  يكون  $5316911983139663491615228241121378304 = 5316911983139663491615228241121378304$  ، بوضع  $r=124$  يكون  $10633823966279326983230456482242756608 = 10633823966279326983230456482242756608$  ، بوضع  $r=125$  يكون  $21267647932558653966460912964485513216 = 21267647932558653966460912964485513216$  ، بوضع  $r=126$  يكون  $42535295865117307932921825928971026432 = 42535295865117307932921825928971026432$  ، بوضع  $r=127$  يكون  $85070591730234615865843651857942052864 = 85070591730234615865843651857942052864$  ، بوضع  $r=128$  يكون  $170141183460469231731687303715884105728 = 170141183460469231731687303715884105728$  ، بوضع  $r=129$  يكون  $340282366920938463463374607431768211456 = 340282366920938463463374607431768211456$  ، بوضع  $r=130$  يكون  $680564733841876926926749214863536422912 = 680564733841876926926749214863536422912$  ، بوضع  $r=131$  يكون  $1361129467683753853853498429727072845824 = 1361129467683753853853498429727072845824$  ، بوضع  $r=132$  يكون  $2722258935367507707706996859454145691648 = 2722258935367507707706996859454145691648$  ، بوضع  $r=133$  يكون  $5444517870735015415413993718908291383296 = 5444517870735015415413993718908291383296$  ، بوضع  $r=134$  يكون  $10889035741470030830827987437816582766592 = 10889035741470030830827987437816582766592$  ، بوضع  $r=135$  يكون  $21778071482940061661655974875633165533184 = 21778071482940061661655974875633165533184$  ، بوضع  $r=136$  يكون  $43556142965880123323311949751266331066368 = 43556142965880123323311949751266331066368$  ، بوضع  $r=137$  يكون  $87112285931760246646623899502532662132736 = 87112285931760246646623899502532662132736$  ، بوضع  $r=138$  يكون  $174224571863520493293247799005065324265472 = 174224571863520493293247799005065324265472$  ، بوضع  $r=139$  يكون  $348449143727040986586495598010130648530944 = 348449143727040986586495598010130648530944$  ، بوضع  $r=140$  يكون  $696898287454081973172991196020261297061888 = 696898287454081973172991196020261297061888$  ، بوضع  $r=141$  يكون  $1393796574908163946345982392040522594123776 = 1393796574908163946345982392040522594123776$  ، بوضع  $r=142$  يكون  $2787593149816327892691964784081045188247552 = 2787593149816327892691964784081045188247552$  ، بوضع  $r=143$  يكون  $5575186299632655785383929568162090376495104 = 5575186299632655785383929568162090376495104$  ، بوضع  $r=144$  يكون  $11150372599265311570767859136324180752990208 = 11150372599265311570767859136324180752990208$  ، بوضع  $r=145$  يكون  $22300745198530623141535718272648361505980416 = 22300745198530623141535718272648361505980416$  ، بوضع  $r=146$  يكون  $44601490397061246283071436545296723011960832 = 44601490397061246283071436545296723011960832$  ، بوضع  $r=147$  يكون  $89202980794122492566142873090593446023921664 = 89202980794122492566142873090593446023921664$  ، بوضع  $r=148$  يكون  $178405961588244985132285746181186892047843328 = 178405961588244985132285746181186892047843328$  ، بوضع  $r=149$  يكون  $356811923176489970264571492362373784095686656 = 356811923176489970264571492362373784095686656$  ، بوضع  $r=150$  يكون  $713623846352979940529142984724747568191373312 = 713623846352979940529142984724747568191373312$  ، بوضع  $r=151$  يكون  $1427247692705959881058285969449495136382746624 = 1427247692705959881058285969449495136382746624$  ، بوضع  $r=152$  يكون  $2854495385411919762116571938898990272765493248 = 2854495385411919762116571938898990272765493248$  ، بوضع  $r=153$  يكون  $5708990770823839524233143877797980545530986496 = 5708990770823839524233143877797980545530986496$  ، بوضع  $r=154$  يكون  $11417981541647679048466287755595961091061972992 = 11417981541647679048466287755595961091061972992$  ، بوضع  $r=155$  يكون  $22835963083295358096932575511191922182123945984 = 22835963083295358096932575511191922182123945984$  ، بوضع  $r=156$  يكون  $45671926166590716193865151022383844364247891968 = 45671926166590716193865151022383844364247891968$  ، بوضع  $r=157$  يكون  $91343852333181432387730302044767688728495783936 = 91343852333181432387730302044767688728495783936$  ، بوضع  $r=158$  يكون  $182687704666362864775460604089535377456991567872 = 182687704666362864775460604089535377456991567872$  ، بوضع  $r=159$  يكون  $365375409332725729550921208179070754913983135744 = 365375409332725729550921208179070754913983135744$  ، بوضع  $r=160$  يكون  $730750818665451459101842416358141509827966271488 = 730750818665451459101842416358141509827966271488$  ، بوضع  $r=161$  يكون  $1461501637330902918203684832716283019655932542976 = 1461501637330902918203684832716283019655932542976$  ، بوضع  $r=162</$



وبممكن التدقيق من مجموع، المتسلسلة باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي .

١- **ضغط** على مفتاح رمز التجميع  $\sum_{x=0}^{\square}$  حسب اللون المحدد لذلك وهو غالباً

$\text{Log}$   $\text{Shift}$  سيقم الشاشة بحيث نكتب قاعدة المتتابعة أولاً

٢- نكتب قاعدة المتتابعة  $r^x$  كما التالي:  $\text{Log}$   $\text{Alpha}$   $\text{X}$   $\text{Y}$

٣- **نستخدم** المفتاح  $\text{Replay}$   $\text{REP}$  لننتقل إلى أسفل لكتابة العدد الذي نبدأ به

وهو ١٠، ثم ننتقل إلى أعلى باستخدام المفتاح  $\text{Replay}$   $\text{REP}$  لنكتب عند الحدود وهو ٤٠ فيكون شكل الشاشة هو  $\sum_{x=1}^4 (x)^2$

٤- **نضغط** على مفتاح  $=$  ليعطي الناتج على الشاشة وهو ٣٠ وهو مطابق للناتج الجمع السابق.

٢) بوضع  $r=2$  يكون  $5=1+2 \times 2$

بوضع  $r=3$  يكون  $7=1+2 \times 3$

بوضع  $r=4$  يكون  $9=1+2 \times 4$

بوضع  $r=5$  يكون  $11=1+2 \times 5$

بوضع  $r=6$  يكون  $13=1+2 \times 6$

وتكون المتسلسلة هي مجموع هذه الحدود

أي أن: المتسلسلة هي  $(5+7+9+11+13)$  ويكون  $\sum_{r=1}^6 (1+2r)$

٣)  $\sum_{r=1}^6 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{1+6} \right) = \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{7} \right)$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{1+6} + \dots + \frac{1}{6} - \frac{1}{6+1} = 1 - \frac{1}{7}$$

$$\frac{6}{1+6} = \frac{1-6-1}{1+6} = 1 - \frac{1}{1+6} =$$



## مثال

أوجد نظريتين مختلفتين:  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ( $\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2$ )

## الحل

الطريقة الأولى: التعويض المباشر،

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) + (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) + (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) = (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$8 = 6 + 2 + 0 + 0 = (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) +$$

الطريقة الثانية: استخدام الخواص الجبرية للتجميع،

$$\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} = (\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{(1 + 2 \times 3)(1 + 2) \frac{1}{2}}{2} + \frac{(1 + 2) \frac{1}{2}}{2} \times 3 - 2 \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{9 \times 2 \times \frac{1}{2}}{2} + \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1} \times 3 - 1 =$$

$$8 = 30 + 30 - 8 =$$

## مثال

إذا كان  $\frac{u}{\sqrt{2}} = 190$  أوجد قيمة  $u$

## الحل

$$190 = \frac{u}{\sqrt{2}}$$

$$190 = \frac{(1 + u) u}{2} \therefore$$

$$380 = (1 + u) u \therefore$$

$$u = 380 - u + 2u \therefore$$

$$u = (20 + u)(19 - u) \therefore$$

$$\therefore u = 19 \text{ أو } u = 20 \text{ (مرفوض لأن } u \in \mathbb{N}^+)$$



## مثال ٧

أوجد ما يأتي :

① مجموع الأعداد الزوجية، إلى العدد ١٠٠

② مجموع الأعداد الفردية إلى العدد ٤٩

## الحل

① المجموع =  $2 + 4 + 6 + \dots + 100$  ، عدد الحدود  $n = 50$

$$2050 = (1 + 50) 50 = (1 + n) n = n^2 \sum_{i=1}^n 2$$

②  $1 - 2 = 19 \dots$  ،  $25 = n$  ،

$$625 = {}^2(25) = {}^2n = (1 - \sqrt{2}) \sum_{i=1}^n 2$$

## مثال ٨

أوجد عدد الحدود في كل مما يأتي :

① إذا كان  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 1260$

② إذا كان  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2n = 289$

## الحل

①  $1260 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$

$$(1 + n) n = n^2 \sum_{i=1}^n 2$$

$$n + {}^2n = 1260$$

$$n = (25 - n) (26 + n)$$

، عدد الحدود = ٢٥ حدًا

$$n = 1260 - n + {}^2n$$

$$26 = n (مرفوض) ، 25 = n$$

②  $289 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 2n$

$${}^2n = (1 - \sqrt{2}) \sum_{i=1}^n 2$$

$$289 = {}^2n$$

، عدد الحدود = ١٧ حدًا

$$17 = n$$



## مثال

استخدم رمز التجميع  $\sum$  في كتابة المتسلسلة:  $2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 4 + \dots$

## الحل

نكتب أولاً الحد العام بالطريقة التالية ،

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \\ 2 \times 2 & + & 3 \times 3 & + & 4 \times 4 \end{array}$$

$$(2+1)(1+1) = 2 \times 2 = 2$$

$$(2+2)(1+2) = 3 \times 3 = 3$$

$$(2+3)(1+3) = 4 \times 4 = 4$$

$$(2+r)(1+r) = r$$

$\therefore$  الحد العام للمتتالية هو  $r = (2+r)(1+r)$  حيث  $r \in \mathbb{N}^+$

$$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} (2+r)(1+r) = \dots + 4 \times 4 + 3 \times 3 + 2 \times 2$$



أشياء كثيرة  
لا تتركها  
لنفسك  
لأنك  
تستطيع

راجع معنا واحدا من نفسك

عزيزي الطالب

في هذا المكان من كل تمرين مستجد

أسئلة لمراجعة ما سبق في صورة إختبار تراكى على ما سبق دراسته يتم الإجابة في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدوس الجديد وهذا يجعلك تذكر ما درست بإستقرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة بما يجعلك في تواصل ... ١٠ - ١١ - ١٢ ...  
يعودك على التفكير بطريقة مثمرة وهذه لميزة يقدمها لك كتاب الماهر

تأخذ عن أنت محرام

كتب @aneasnowe

مسائل المستوى الأول

أكتب الستة حدود الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

١) متتابعة الأعداد الفردية السالبة التي تبدأ بالعدد (-١)

٢) متتابعة الأعداد المحصورة بين ٥١ و ٨١ والتي يقبل كل منها القسمة على ٥

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) المتتامة هي دالة مجالها هو

[ $-\infty$  ;  $+\infty$ ]  $\cup$   $[-\infty$  ;  $-\infty$ ]  $\cup$   $[\infty$  ;  $+\infty$ ] أو مجموعة جزئية منها

٢) الحد الخامس للمتتابعة ( $u_n$ ) حيث  $u_1 = 1$  و  $u_2 = 2$  هو .....

[ ٩   ١٠   ١١   ١٢ ]

٣) الحد الرابع للمتتابعة ( $u_n$ ) حيث  $u_1 = 1$  و  $u_2 = 2$  هو .....

[ ٤   ١٦   ١٩   ٢٠ ]

٤) هي المتتابعة ( $u_n$ ) حيث  $u_1 = 1$  و  $u_2 = 1$  إذا كان  $u_1 = 1$  فإن  $u_2 = 1$  .....

[ ١   ٢   ٣   ٤ ]

٥) تكون المتتابعة تناقصية إذا كان  $u_1 > u_2$  لكل  $n \in \mathbb{N}$  .....

[  $<$     $\leq$     $>$     $=$  ]



٦. تكون المتتابة ثابتة إذا كان  $u_n = \dots$  لكل  $n \leq 1$   
 $[< \quad > \quad \leq \quad \geq \quad =]$

٧. تكون المتتابة تزايدية إذا كان  $u_n = \dots$  لكل  $n \leq 1$   
 $[< \quad > \quad \leq \quad \geq \quad =]$

٨. الحد السابع للمتتابة  $(u_n)$  حيث  $u_n = 2^n + 3^n$  هو .....  
 $[17 \quad 49 \quad 98 \quad 191]$

٩. الحد الرابع للمتتابة  $(u_n)$  حيث  $u_n = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$  هو .....  
 $[\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5}]$

١٠. الحد الثامن للمتتابة  $(u_n)$  حيث  $u_n = 3^n - 2^n$  إذا كان  $u_1 = 1$  فإن  $u_8 = \dots$   
 $[3 \quad 4 \quad 5 \quad 6]$

١١. الحد النوني للمتتابة  $(u_n)$  هو .....  
 $[2^n \quad 3^n \quad 4^n \quad 5^n]$

١٢. الحد النوني للمتتابة  $(u_n)$  هو .....  
 $[(1-n)^n \quad 1-n \quad 1-n^2 \quad (1-n)^{n+1}]$

١٣. بين المتتابات الآتية إذا كانت منتهية أو غير منتهية:

١.  $(u_n)$   $(1, 2, 3, \dots)$

٢. المتتابة  $(u_n)$  حيث  $u_n = 1 - 2^n$

٣. المتتابة  $(u_n)$  حيث  $u_n = 3 + \frac{1}{n}$

١٤. أكتشف النمط ثم أكتب الحد التالي:

١.  $65, 73, 81, 89, \dots$

٢.  $63, 69, 75, 81, 87, \dots$

### التمرين الثاني مسائل المستوى الثاني

١. أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١. الحد الخامس في متتابة الأعداد الطبيعية التي تقبل تقسمة على 5 هو .....

$[5 \quad 20 \quad 25 \quad 30]$



٢) الحد العاشر من المتتابعة التي حدها النوني  $\frac{1}{n} = 1$  حيث  $n \in \mathbb{N}^+$  هو .....

$$\left[ \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5} \right]$$

٣) قاعدة المتتابعة  $(1 \times 2), (2 \times 3), (3 \times 4), (4 \times 5), \dots$  هي .....

$$[(1+2)(1+3), (1+3)2, (1+3)3, (1+3)4, (1+3)5, \dots]$$

١.١ المتتابعة التي حدها النوني  $\frac{1}{n} = 1$  حيث  $n \in \mathbb{N}^+$  تمثل متتابعة .....

[تزايدية | تناقصية | ثابتة | تذبذبية]

٢. أكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التي حدها العام يعطى بالقواعد الآتية:

$$u_n = \frac{1}{n-1}$$

$$u_n = u_{n-1} + 2$$

$$u_n = (1-u)^{n-1}$$

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = \left(\pi \frac{n}{4}\right)$$

$$u_n = \frac{n(1-1)}{2}$$

٣. أكتب كلاً من المتتابعات التي حدها النوني يعطى بالعلاقة:

(الحد خمسة حدود ابتداء من الحد الأول)

$$u_n = 2 - u_{n-1}$$

(الحد غير معلوم من الحدود ابتداء من الحد الأول)

$$u_n = u_{n-1}^2$$

٤. أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة  $(u_n)$  المعرفة كالاتي:

$$u_n = 1 + u_{n-1} \quad u_1 = 1 \quad \text{حيث } n \geq 1$$

٥. أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة  $(u_n)$  المعرفة كالاتي:

$$u_n = 3 - u_{n-1} \quad u_1 = 2 \quad \text{حيث } n \geq 1$$

٦. يمارس كريم تمارين اللياقة البدنية لمدة ٨ دقائق في اليوم الأول ثم يريد الفترة

بعد ذلك بمعدل دقيقتين يومياً

١) أكتب الخمسة حدود الأولى لهذه المتتابعة.

٢) أوجد الحد العام لهذه المتتابعة.

٣) أوجد الزمن الذي يستغرقه كريم في اليوم السابع.

٤) في أي يوم سيكون الزمن الذي يستغرقه كريم نصف ساعة ؟ وضح إجابتك.



١١) بين أيًا من المتتابعات (ع) تزايدية وأيها تناقصية وأيها غير ذلك في كل مما يأتي:

$$٥ + ٧٣ = \text{ع } ٢$$

$$٢ + \frac{1}{٥} = \text{ع } ١$$

$$٧(٢-) = \text{ع } ٤$$

$$٧\left(\frac{1}{٢}\right) = \text{ع } ٣$$

$$(١ + ٧)٧(١-) = \text{ع } ٦$$

$$١ + ٧\left(\frac{1}{٢}\right) = \text{ع } ٥$$

١٢) أكتب معكوك كل من المتسلسلات الآتية:

$$\left(\sqrt{٤} + \sqrt{١-}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٢$$

$$\left(٢ - \sqrt{٣}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ١$$

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{}} - \frac{1}{\sqrt{}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٤$$

$$١ - \sqrt{\left(\frac{1}{٢}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} ٣$$

١٣) أوجد مجموع المعكوك في كل من المتسلسلات الآتية ثم **تحقق** من صحة الناتج

بإستخدام الآلة الحاسبة:

$$\left(٣ + \sqrt{٢}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٢$$

$$٩ \sum_{n=1}^{\infty} ١$$

$$\sqrt{١ + \sqrt{}} \sum_{n=1}^{\infty} ٤$$

$$\left(٢ - \sqrt{٣}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٣$$

$$\left(٢ + \frac{1}{\sqrt{}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٦$$

$$\left(٢ - \sqrt{٢}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٥$$

$$\left(\frac{\pi}{٢}\right) \sum_{n=1}^{\infty} ٨$$

$$١ + \sqrt{\left(\frac{1}{٢}\right)} \times ٣ \sum_{n=1}^{\infty} ٧$$

١٤) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه:

١) المتسلسلة  $٥ + ١٥ + ٢٥ + ٣٥ + \dots$  تكتب بإستخدام رمز المجموع على الصورة .....

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٥}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٢}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٥}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٢}) \right]$$

٢) المتسلسلة  $١ \times ٧ + ٢ \times ٧ + ٣ \times ٧ + \dots + ١٥ \times ٧$  تكتب بإستخدام رمز المجموع على

$$\text{الصورة} \dots \dots \dots \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٧}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{١}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{٧}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{١}) \right]$$

٣) المتسلسلة  $\frac{1}{٤} + \frac{1}{٨} + \frac{1}{١٦} + \dots$  تكتب بإستخدام رمز المجموع على الصورة .....

$$\left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٥}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٤}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٤}\right) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{٥}\right) \right]$$



④ المتسلسلة  $1 + 999 + 999 + 99 + \dots$  إلى  $n$  حدًا تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة  $\dots$

$$\left[ \sum_{i=1}^n (10)^i - 1 \right] \text{ كـ } \sum_{i=1}^n (10)^i - 1 \text{ كـ } \sum_{i=1}^n (10)^i - 1 \text{ كـ } \sum_{i=1}^n (10)^i - 1$$

⑤ أجب الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① المتسلسلة  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$  تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة  $\dots$

$$\left[ \sum_{i=1}^n i \right] \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i$$

② المتسلسلة  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$  تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة  $\dots$

$$\left[ \sum_{i=1}^n i \right] \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i$$

③ المتسلسلة  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$  تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة  $\dots$

$$\left[ \sum_{i=1}^n i \right] \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i$$

④ المتسلسلة  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$  تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة  $\dots$

$$\left[ \sum_{i=1}^n i \right] \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i$$

⑤ المتسلسلة  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$  تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة  $\dots$

$$\left[ \sum_{i=1}^n i \right] \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i$$

⑥ المتسلسلة  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100$  تكتب باستخدام رمز المجموع على الصورة  $\dots$

$$\left[ \sum_{i=1}^n i \right] \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i \text{ كـ } \sum_{i=1}^n i$$

⑦ إذا علمت أن  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ ،  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

فأوجد باستخدام خواص رمز التجميع قيمة كل مما يأتي:

$$\textcircled{1} \sum_{i=1}^n (i^2 + i) \quad \textcircled{2} \sum_{i=1}^n (i^2 - i)$$

⑧ أجب الحد العام لكل من المتتابعات الآتية:

$$\textcircled{1} (1, 2, 3, 4, 5, \dots) \quad \textcircled{2} \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$$

$$\textcircled{3} (1, 2, 3, 4, 5, \dots) \quad \textcircled{4} \left(1, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \dots\right)$$

$$\textcircled{5} (1, 2, 3, 4, 5, \dots) \quad \textcircled{6} \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \dots\right)$$



١٨ في المتتابعة  $(u_n)$  إذا كان  $u_1 = 9$ ،  $u_2 = 4$ ،  $u_3 = 1$ ،  $u_4 = -2$ ،  $u_5 = -5$ ،  $u_6 = -8$ ،  $u_7 = -11$ ،  $u_8 = -14$ ،  $u_9 = -17$ ،  $u_{10} = -20$ ،  $u_{11} = -23$ ،  $u_{12} = -26$ ،  $u_{13} = -29$ ،  $u_{14} = -32$ ،  $u_{15} = -35$ ،  $u_{16} = -38$ ،  $u_{17} = -41$ ،  $u_{18} = -44$ ،  $u_{19} = -47$ ،  $u_{20} = -50$ ،  $u_{21} = -53$ ،  $u_{22} = -56$ ،  $u_{23} = -59$ ،  $u_{24} = -62$ ،  $u_{25} = -65$ ،  $u_{26} = -68$ ،  $u_{27} = -71$ ،  $u_{28} = -74$ ،  $u_{29} = -77$ ،  $u_{30} = -80$ ،  $u_{31} = -83$ ،  $u_{32} = -86$ ،  $u_{33} = -89$ ،  $u_{34} = -92$ ،  $u_{35} = -95$ ،  $u_{36} = -98$ ،  $u_{37} = -101$ ،  $u_{38} = -104$ ،  $u_{39} = -107$ ،  $u_{40} = -110$ ،  $u_{41} = -113$ ،  $u_{42} = -116$ ،  $u_{43} = -119$ ،  $u_{44} = -122$ ،  $u_{45} = -125$ ،  $u_{46} = -128$ ،  $u_{47} = -131$ ،  $u_{48} = -134$ ،  $u_{49} = -137$ ،  $u_{50} = -140$ ،  $u_{51} = -143$ ،  $u_{52} = -146$ ،  $u_{53} = -149$ ،  $u_{54} = -152$ ،  $u_{55} = -155$ ،  $u_{56} = -158$ ،  $u_{57} = -161$ ،  $u_{58} = -164$ ،  $u_{59} = -167$ ،  $u_{60} = -170$ ،  $u_{61} = -173$ ،  $u_{62} = -176$ ،  $u_{63} = -179$ ،  $u_{64} = -182$ ،  $u_{65} = -185$ ،  $u_{66} = -188$ ،  $u_{67} = -191$ ،  $u_{68} = -194$ ،  $u_{69} = -197$ ،  $u_{70} = -200$ ،  $u_{71} = -203$ ،  $u_{72} = -206$ ،  $u_{73} = -209$ ،  $u_{74} = -212$ ،  $u_{75} = -215$ ،  $u_{76} = -218$ ،  $u_{77} = -221$ ،  $u_{78} = -224$ ،  $u_{79} = -227$ ،  $u_{80} = -230$ ،  $u_{81} = -233$ ،  $u_{82} = -236$ ،  $u_{83} = -239$ ،  $u_{84} = -242$ ،  $u_{85} = -245$ ،  $u_{86} = -248$ ،  $u_{87} = -251$ ،  $u_{88} = -254$ ،  $u_{89} = -257$ ،  $u_{90} = -260$ ،  $u_{91} = -263$ ،  $u_{92} = -266$ ،  $u_{93} = -269$ ،  $u_{94} = -272$ ،  $u_{95} = -275$ ،  $u_{96} = -278$ ،  $u_{97} = -281$ ،  $u_{98} = -284$ ،  $u_{99} = -287$ ،  $u_{100} = -290$ ،  $u_{101} = -293$ ،  $u_{102} = -296$ ،  $u_{103} = -299$ ،  $u_{104} = -302$ ،  $u_{105} = -305$ ،  $u_{106} = -308$ ،  $u_{107} = -311$ ،  $u_{108} = -314$ ،  $u_{109} = -317$ ،  $u_{110} = -320$ ،  $u_{111} = -323$ ،  $u_{112} = -326$ ،  $u_{113} = -329$ ،  $u_{114} = -332$ ،  $u_{115} = -335$ ،  $u_{116} = -338$ ،  $u_{117} = -341$ ،  $u_{118} = -344$ ،  $u_{119} = -347$ ،  $u_{120} = -350$ ،  $u_{121} = -353$ ،  $u_{122} = -356$ ،  $u_{123} = -359$ ،  $u_{124} = -362$ ،  $u_{125} = -365$ ،  $u_{126} = -368$ ،  $u_{127} = -371$ ،  $u_{128} = -374$ ،  $u_{129} = -377$ ،  $u_{130} = -380$ ،  $u_{131} = -383$ ،  $u_{132} = -386$ ،  $u_{133} = -389$ ،  $u_{134} = -392$ ،  $u_{135} = -395$ ،  $u_{136} = -398$ ،  $u_{137} = -401$ ،  $u_{138} = -404$ ،  $u_{139} = -407$ ،  $u_{140} = -410$ ،  $u_{141} = -413$ ،  $u_{142} = -416$ ،  $u_{143} = -419$ ،  $u_{144} = -422$ ،  $u_{145} = -425$ ،  $u_{146} = -428$ ،  $u_{147} = -431$ ،  $u_{148} = -434$ ،  $u_{149} = -437$ ،  $u_{150} = -440$ ،  $u_{151} = -443$ ،  $u_{152} = -446$ ،  $u_{153} = -449$ ،  $u_{154} = -452$ ،  $u_{155} = -455$ ،  $u_{156} = -458$ ،  $u_{157} = -461$ ،  $u_{158} = -464$ ،  $u_{159} = -467$ ،  $u_{160} = -470$ ،  $u_{161} = -473$ ،  $u_{162} = -476$ ،  $u_{163} = -479$ ،  $u_{164} = -482$ ،  $u_{165} = -485$ ،  $u_{166} = -488$ ،  $u_{167} = -491$ ،  $u_{168} = -494$ ،  $u_{169} = -497$ ،  $u_{170} = -500$ ،  $u_{171} = -503$ ،  $u_{172} = -506$ ،  $u_{173} = -509$ ،  $u_{174} = -512$ ،  $u_{175} = -515$ ،  $u_{176} = -518$ ،  $u_{177} = -521$ ،  $u_{178} = -524$ ،  $u_{179} = -527$ ،  $u_{180} = -530$ ،  $u_{181} = -533$ ،  $u_{182} = -536$ ،  $u_{183} = -539$ ،  $u_{184} = -542$ ،  $u_{185} = -545$ ،  $u_{186} = -548$ ،  $u_{187} = -551$ ،  $u_{188} = -554$ ،  $u_{189} = -557$ ،  $u_{190} = -560$ ،  $u_{191} = -563$ ،  $u_{192} = -566$ ،  $u_{193} = -569$ ،  $u_{194} = -572$ ،  $u_{195} = -575$ ،  $u_{196} = -578$ ،  $u_{197} = -581$ ،  $u_{198} = -584$ ،  $u_{199} = -587$ ،  $u_{200} = -590$ ،  $u_{201} = -593$ ،  $u_{202} = -596$ ،  $u_{203} = -599$ ،  $u_{204} = -602$ ،  $u_{205} = -605$ ،  $u_{206} = -608$ ،  $u_{207} = -611$ ،  $u_{208} = -614$ ،  $u_{209} = -617$ ،  $u_{210} = -620$ ،  $u_{211} = -623$ ،  $u_{212} = -626$ ،  $u_{213} = -629$ ،  $u_{214} = -632$ ،  $u_{215} = -635$ ،  $u_{216} = -638$ ،  $u_{217} = -641$ ،  $u_{218} = -644$ ،  $u_{219} = -647$ ،  $u_{220} = -650$ ،  $u_{221} = -653$ ،  $u_{222} = -656$ ،  $u_{223} = -659$ ،  $u_{224} = -662$ ،  $u_{225} = -665$ ،  $u_{226} = -668$ ،  $u_{227} = -671$ ،  $u_{228} = -674$ ،  $u_{229} = -677$ ،  $u_{230} = -680$ ،  $u_{231} = -683$ ،  $u_{232} = -686$ ،  $u_{233} = -689$ ،  $u_{234} = -692$ ،  $u_{235} = -695$ ،  $u_{236} = -698$ ،  $u_{237} = -701$ ،  $u_{238} = -704$ ،  $u_{239} = -707$ ،  $u_{240} = -710$ ،  $u_{241} = -713$ ،  $u_{242} = -716$ ،  $u_{243} = -719$ ،  $u_{244} = -722$ ،  $u_{245} = -725$ ،  $u_{246} = -728$ ،  $u_{247} = -731$ ،  $u_{248} = -734$ ،  $u_{249} = -737$ ،  $u_{250} = -740$ ،  $u_{251} = -743$ ،  $u_{252} = -746$ ،  $u_{253} = -749$ ،  $u_{254} = -752$ ،  $u_{255} = -755$ ،  $u_{256} = -758$ ،  $u_{257} = -761$ ،  $u_{258} = -764$ ،  $u_{259} = -767$ ،  $u_{260} = -770$ ،  $u_{261} = -773$ ،  $u_{262} = -776$ ،  $u_{263} = -779$ ،  $u_{264} = -782$ ،  $u_{265} = -785$ ،  $u_{266} = -788$ ،  $u_{267} = -791$ ،  $u_{268} = -794$ ،  $u_{269} = -797$ ،  $u_{270} = -800$ ،  $u_{271} = -803$ ،  $u_{272} = -806$ ،  $u_{273} = -809$ ،  $u_{274} = -812$ ،  $u_{275} = -815$ ،  $u_{276} = -818$ ،  $u_{277} = -821$ ،  $u_{278} = -824$ ،  $u_{279} = -827$ ،  $u_{280} = -830$ ،  $u_{281} = -833$ ،  $u_{282} = -836$ ،  $u_{283} = -839$ ،  $u_{284} = -842$ ،  $u_{285} = -845$ ،  $u_{286} = -848$ ،  $u_{287} = -851$ ،  $u_{288} = -854$ ،  $u_{289} = -857$ ،  $u_{290} = -860$ ،  $u_{291} = -863$ ،  $u_{292} = -866$ ،  $u_{293} = -869$ ،  $u_{294} = -872$ ،  $u_{295} = -875$ ،  $u_{296} = -878$ ،  $u_{297} = -881$ ،  $u_{298} = -884$ ،  $u_{299} = -887$ ،  $u_{300} = -890$ ،  $u_{301} = -893$ ،  $u_{302} = -896$ ،  $u_{303} = -899$ ،  $u_{304} = -902$ ،  $u_{305} = -905$ ،  $u_{306} = -908$ ،  $u_{307} = -911$ ،  $u_{308} = -914$ ،  $u_{309} = -917$ ،  $u_{310} = -920$ ،  $u_{311} = -923$ ،  $u_{312} = -926$ ،  $u_{313} = -929$ ،  $u_{314} = -932$ ،  $u_{315} = -935$ ،  $u_{316} = -938$ ،  $u_{317} = -941$ ،  $u_{318} = -944$ ،  $u_{319} = -947$ ،  $u_{320} = -950$ ،  $u_{321} = -953$ ،  $u_{322} = -956$ ،  $u_{323} = -959$ ،  $u_{324} = -962$ ،  $u_{325} = -965$ ،  $u_{326} = -968$ ،  $u_{327} = -971$ ،  $u_{328} = -974$ ،  $u_{329} = -977$ ،  $u_{330} = -980$ ،  $u_{331} = -983$ ،  $u_{332} = -986$ ،  $u_{333} = -989$ ،  $u_{334} = -992$ ،  $u_{335} = -995$ ،  $u_{336} = -998$ ،  $u_{337} = -1001$ ،  $u_{338} = -1004$ ،  $u_{339} = -1007$ ،  $u_{340} = -1010$ ،  $u_{341} = -1013$ ،  $u_{342} = -1016$ ،  $u_{343} = -1019$ ،  $u_{344} = -1022$ ،  $u_{345} = -1025$ ،  $u_{346} = -1028$ ،  $u_{347} = -1031$ ،  $u_{348} = -1034$ ،  $u_{349} = -1037$ ،  $u_{350} = -1040$ ،  $u_{351} = -1043$ ،  $u_{352} = -1046$ ،  $u_{353} = -1049$ ،  $u_{354} = -1052$ ،  $u_{355} = -1055$ ،  $u_{356} = -1058$ ،  $u_{357} = -1061$ ،  $u_{358} = -1064$ ،  $u_{359} = -1067$ ،  $u_{360} = -1070$ ،  $u_{361} = -1073$ ،  $u_{362} = -1076$ ،  $u_{363} = -1079$ ،  $u_{364} = -1082$ ،  $u_{365} = -1085$ ،  $u_{366} = -1088$ ،  $u_{367} = -1091$ ،  $u_{368} = -1094$ ،  $u_{369} = -1097$ ،  $u_{370} = -1100$ ،  $u_{371} = -1103$ ،  $u_{372} = -1106$ ،  $u_{373} = -1109$ ،  $u_{374} = -1112$ ،  $u_{375} = -1115$ ،  $u_{376} = -1118$ ،  $u_{377} = -1121$ ،  $u_{378} = -1124$ ،  $u_{379} = -1127$ ،  $u_{380} = -1130$ ،  $u_{381} = -1133$ ،  $u_{382} = -1136$ ،  $u_{383} = -1139$ ،  $u_{384} = -1142$ ،  $u_{385} = -1145$ ،  $u_{386} = -1148$ ،  $u_{387} = -1151$ ،  $u_{388} = -1154$ ،  $u_{389} = -1157$ ،  $u_{390} = -1160$ ،  $u_{391} = -1163$ ،  $u_{392} = -1166$ ،  $u_{393} = -1169$ ،  $u_{394} = -1172$ ،  $u_{395} = -1175$ ،  $u_{396} = -1178$ ،  $u_{397} = -1181$ ،  $u_{398} = -1184$ ،  $u_{399} = -1187$ ،  $u_{400} = -1190$ ،  $u_{401} = -1193$ ،  $u_{402} = -1196$ ،  $u_{403} = -1199$ ،  $u_{404} = -1202$ ،  $u_{405} = -1205$ ،  $u_{406} = -1208$ ،  $u_{407} = -1211$ ،  $u_{408} = -1214$ ،  $u_{409} = -1217$ ،  $u_{410} = -1220$ ،  $u_{411} = -1223$ ،  $u_{412} = -1226$ ،  $u_{413} = -1229$ ،  $u_{414} = -1232$ ،  $u_{415} = -1235$ ،  $u_{416} = -1238$ ،  $u_{417} = -1241$ ،  $u_{418} = -1244$ ،  $u_{419} = -1247$ ،  $u_{420} = -1250$ ،  $u_{421} = -1253$ ،  $u_{422} = -1256$ ،  $u_{423} = -1259$ ،  $u_{424} = -1262$ ،  $u_{425} = -1265$ ،  $u_{426} = -1268$ ،  $u_{427} = -1271$ ،  $u_{428} = -1274$ ،  $u_{429} = -1277$ ،  $u_{430} = -1280$ ،  $u_{431} = -1283$ ،  $u_{432} = -1286$ ،  $u_{433} = -1289$ ،  $u_{434} = -1292$ ،  $u_{435} = -1295$ ،  $u_{436} = -1298$ ،  $u_{437} = -1301$ ،  $u_{438} = -1304$ ،  $u_{439} = -1307$ ،  $u_{440} = -1310$ ،  $u_{441} = -1313$ ،  $u_{442} = -1316$ ،  $u_{443} = -1319$ ،  $u_{444} = -1322$ ،  $u_{445} = -1325$ ،  $u_{446} = -1328$ ،  $u_{447} = -1331$ ،  $u_{448} = -1334$ ،  $u_{449} = -1337$ ،  $u_{450} = -1340$ ،  $u_{451} = -1343$ ،  $u_{452} = -1346$ ،  $u_{453} = -1349$ ،  $u_{454} = -1352$ ،  $u_{455} = -1355$ ،  $u_{456} = -1358$ ،  $u_{457} = -1361$ ،  $u_{458} = -1364$ ،  $u_{459} = -1367$ ،  $u_{460} = -1370$ ،  $u_{461} = -1373$ ،  $u_{462} = -1376$ ،  $u_{463} = -1379$ ،  $u_{464} = -1382$ ،  $u_{465} = -1385$ ،  $u_{466} = -1388$ ،  $u_{467} = -1391$ ،  $u_{468} = -1394$ ،  $u_{469} = -1397$ ،  $u_{470} = -1400$ ،  $u_{471} = -1403$ ،  $u_{472} = -1406$ ،  $u_{473} = -1409$ ،  $u_{474} = -1412$ ،  $u_{475} = -1415$ ،  $u_{476} = -1418$ ،  $u_{477} = -1421$ ،  $u_{478} = -1424$ ،  $u_{479} = -1427$ ،  $u_{480} = -1430$ ،  $u_{481} = -1433$ ،  $u_{482} = -1436$ ،  $u_{483} = -1439$ ،  $u_{484} = -1442$ ،  $u_{485} = -1445$ ،  $u_{486} = -1448$ ،  $u_{487} = -1451$ ،  $u_{488} = -1454$ ،  $u_{489} = -1457$ ،  $u_{490} = -1460$ ،  $u_{491} = -1463$ ،  $u_{492} = -1466$ ،  $u_{493} = -1469$ ،  $u_{494} = -1472$ ،  $u_{495} = -1475$ ،  $u_{496} = -1478$ ،  $u_{497} = -1481$ ،  $u_{498} = -1484$ ،  $u_{499} = -1487$ ،  $u_{500} = -1490$ ،  $u_{501} = -1493$ ،  $u_{502} = -1496$ ،  $u_{503} = -1499$ ،  $u_{504} = -1502$ ،  $u_{505} = -1505$ ،  $u_{506} = -1508$ ،  $u_{507} = -1511$ ،  $u_{508} = -1514$ ،  $u_{509} = -1517$ ،  $u_{510} = -1520$ ،  $u_{511} = -1523$ ،  $u_{512} = -1526$ ،  $u_{513} = -1529$ ،  $u_{514} = -1532$ ،  $u_{515} = -1535$ ،  $u_{516} = -1538$ ،  $u_{517} = -1541$ ،  $u_{518} = -1544$ ،  $u_{519} = -1547$ ،  $u_{520} = -1550$ ،  $u_{521} = -1553$ ،  $u_{522} = -1556$ ،  $u_{523} = -1559$ ،  $u_{524} = -1562$ ،  $u_{525} = -1565$ ،  $u_{526} = -1568$ ،  $u_{527} = -1571$ ،  $u_{528} = -1574$ ،  $u_{529} = -1577$ ،  $u_{530} = -1580$ ،  $u_{531} = -1583$ ،  $u_{532} = -1586$ ،  $u_{533} = -1589$ ،  $u_{534} = -1592$ ،  $u_{535} = -1595$ ،  $u_{536} = -1598$ ،  $u_{537} = -1601$ ،  $u_{538} = -1604$ ،  $u_{539} = -1607$ ،  $u_{540} = -1610$ ،  $u_{541} = -1613$ ،  $u_{542} = -1616$ ،  $u_{543} = -1619$ ،  $u_{544} = -1622$ ،  $u_{545} = -1625$ ،  $u_{546} = -1628$ ،  $u_{547} = -1631$ ،  $u_{548} = -1634$ ،  $u_{549} = -1637$ ،  $u_{550} = -1640$ ،  $u_{551} = -1643$ ،  $u_{552} = -1646$ ،  $u_{553} = -1649$ ،  $u_{554} = -1652$ ،  $u_{555} = -1655$ ،  $u_{556} = -1658$ ،  $u_{557} = -1661$ ،  $u_{558} = -1664$ ،  $u_{559} = -1667$ ،  $u_{560} = -1670$ ،  $u_{561} = -1673$ ،  $u_{562} = -1676$ ،  $u_{563} = -1679$ ،  $u_{564} = -1682$ ،  $u_{565} = -1685$ ،  $u_{566} = -1688$ ،  $u_{567} = -1691$ ،  $u_{568} = -1694$ ،  $u_{569} = -1697$ ،  $u_{570} = -1700$ ،  $u_{571} = -1703$ ،  $u_{572} = -1706$ ،  $u_{573} = -1709$ ،  $u_{574} = -1712$ ،  $u_{575} = -1715$ ،  $u_{576} = -1718$ ،  $u_{577} = -1721$ ،  $u_{578} = -1724$ ،  $u_{579} = -1727$ ،  $u_{580} = -1730$ ،  $u_{581} = -1733$ ،  $u_{582} = -1736$ ،  $u_{583} = -1739$ ،  $u_{584} = -1742$ ،  $u_{585} = -1745$ ،  $u_{586} = -1748$ ،  $u_{587} = -1751$ ،  $u_{588} = -1754$ ،  $u_{589} = -1757$ ،  $u_{590} = -1760$ ،  $u_{591} = -1763$ ،  $u_{592} = -1766$ ،  $u_{593} = -1769$ ،  $u_{594} = -1772$ ،  $u_{595} = -1775$ ،  $u_{596} = -1778$ ،  $u_{597} = -1781$ ،  $u_{598} = -1784$ ،  $u_{599} = -1787$ ،  $u_{600} = -1790$ ،  $u_{601} = -1793$ ،  $u_{602} = -1796$ ،  $u_{603} = -1799$ ،  $u_{604} = -1802$ ،  $u_{605} = -1805$ ،  $u_{606} = -1808$ ،  $u_{607} = -1811$ ،  $u_{608} = -1814$ ،  $u_{609} = -1817$ ،  $u_{610} = -1820$ ،  $u_{611} = -1823$ ،  $u_{612} = -1826$ ،  $u_{613} = -1829$ ،  $u_{614} = -1832$ ،  $u_{615} = -1835$ ،  $u_{616} = -1838$ ،  $u_{617} = -1841$ ،  $u_{618} = -1844$ ،  $u_{619} = -1847$ ،  $u_{620} = -1850$ ،  $u_{621} = -1853$ ،  $u_{622} = -1856$ ،  $u_{623} = -1859$ ،  $u_{624} = -1862$ ،  $u_{625} = -1865$ ،  $u_{626} = -1868$ ،  $u_{627} = -1871$ ،  $u_{628} = -1874$ ،  $u_{629} = -1877$ ،  $u_{630} = -1880$ ،  $u_{631} = -1883$ ،  $u_{632} = -1886$ ،  $u_{633} = -1889$ ،  $u_{634} = -1892$ ،  $u_{635} = -1895$ ،  $u_{636} = -1898$ ،  $u_{637} = -1901$ ،  $u_{638} = -1904$ ،  $u_{639} = -1907$ ،  $u_{640} = -1910$ ،  $u_{641} = -1913$ ،  $u_{642} = -1916$ ،  $u_{643} = -1919$ ،  $u_{644} = -1922$ ،  $u_{645} = -1925$ ،  $u_{646} = -1928$ ،  $u_{647} = -1931$ ،  $u_{648} = -1934$ ،  $u_{649} = -1937$ ،  $u_{650} = -1940$ ،  $u_{651} = -1943$ ،  $u_{652} = -1946$ ،  $u_{653} = -1949$ ،  $u_{654} = -1952$ ،  $u_{655} = -1955$ ،  $u_{656} = -1958$ ،  $u_{657} = -1961$ ،  $u_{658} = -1964$ ،  $u_{659} = -1967$ ،  $u_{660} = -1970$ ،  $u_{661} = -1973$ ،  $u_{662} = -1976$ ،  $u_{663} = -1979$ ،  $u_{664} = -1982$ ،  $u_{665} = -1985$ ،  $u_{666} = -1988$ ،  $u_{667} = -1991$ ،  $u_{668} = -1994$ ،  $u_{669} = -1997$ ،  $u_{670} = -2000$ ،  $u_{671} = -2003$ ،  $u_{672} = -2006$ ،  $u_{673} = -2009$ ،  $$



$$[4] \quad \varphi_0 = (1 - \sqrt{5}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5^i} \quad | \quad \varphi_0 = (1 + \sqrt{5}) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{5^i}$$

$$\left[\frac{6}{13}\right] \quad \lambda_0 = (u \text{ سو } + 2) \sum_{u=0}^{\infty} \textcircled{1} \quad 1- \quad \gamma \gamma_0 = (\text{لجی } \text{لجی}) \sum_{u=0}^{\infty} \textcircled{2}$$

﴿٢٦﴾ **أَوْحَدٌ فَيَمُوتُ** ،

①  $\frac{1}{2} [ \text{طاس} - \text{طا} ]$  (س)  $\frac{1}{2} [ \text{طاس} - \text{طا} ]$  ②  $\frac{1}{2} [ \text{طاس} - \text{طا} ]$  (س)  $\frac{1}{2} [ \text{طاس} - \text{طا} ]$

$$③ \sum_{k=1}^n [(1+u)^k - (1+u)^{k-1}] = (1+u)^n - 1$$

$$\left[ \frac{1}{\sqrt{x}} \right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \left( \sqrt{x} - \sqrt{x} \right) \Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \left( \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

۱۱) مکان د (س) =  $\frac{1}{2} \times$  حیث د ا ط - ط  $\times$  (س) =  $\frac{1}{2} \times$  حیث د س : ط - ط

اوجھد (د ص ۲) (۳)

**مثال** إذا كانت د (س) = ٣ - س - ٢ فلو جد  $\frac{d}{ds}$  و  $(س)$

إذا كان  $x$ ،  $y$  هما جذري المعادلة  $x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 1 = 0$ ،  $x + y = 2 + \sqrt{2}$

وكن  $\sum_{i=1}^n (x_i^2 - y_i^2) = 18$  فأوجد قيمة  $n$

10. اوجد قيمة  $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \cdot 2^{-n}$  (ما ب - ما ج)







## مثال

أي من المتتابعات الآتية متتابعة حسابية :

- ①  $(19, 15, 11, 7, 3, \dots)$  ②  $(\dots, 196, 19, 22, 25)$  ③  $(\dots, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots)$

## الحل

لمعرفة ما إذا كانت المتتابعة  $(u_n)$  حسابية أم لا فافحصنا وجود  $u_n - u_{n-1}$  فإذا كان الناتج مقدار ثابت كانت المتتابعة  $(u_n)$  حسابية وأساسها هذا المقدار الثابت.

$$① \because u_2 - u_1 = 15 - 19 = -4 \quad u_3 - u_2 = 11 - 15 = -4$$

$$\therefore u_4 - u_3 = 7 - 11 = -4 \quad u_5 - u_4 = 3 - 7 = -4 \quad \dots \dots \dots = u_n - u_{n-1} = -4$$

$\therefore$  المتتابعة حسابية وأساسها  $-4$

$$② \because u_2 - u_1 = 19 - 22 = -3 \quad u_3 - u_2 = 22 - 19 = 3$$

$$\therefore u_4 - u_3 = 25 - 22 = 3 \quad \dots \dots \dots = u_n - u_{n-1} = 3$$

$\therefore$  المتتابعة حسابية وأساسها  $3$

$$③ \because u_2 - u_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \quad u_3 - u_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore u_4 - u_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \dots \dots \dots = u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$\therefore$  المتتابعة ليست حسابية

**ملاحظة** تسمى المتتابعة توافقية إذا كان مغلوها تكون متتابعة

حسابية مثل المتتابعة السابقة.

## ملاحظات هامة

○ المتتابعة الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى في  $n$  حيث  $u \in \mathbb{N}$  ويكون معامل  $n$  هو أساس المتتابعة.

○ فعلاً  $(u_n) = (2n - 1)$  متتابعة حسابية لأن  $(u_n)$  دالة من الدرجة الأولى في  $n$  وأساسها  $2$

○  $(u_n) = (n^2 + 1)$  متتابعة ليست حسابية لأن  $(u_n)$  دالة من الدرجة الثانية في  $n$



### ٥٠ المتتابعة الحسابية والمنتبة التاقصية

المتتابعة الحسابية (ع) تكون ترايدية إذا كان أساسها موجب (أي  $u > 0$  صفر)  
المتتابعة الحسابية (ع) تكون تناقصية إذا كان أساسها سالب (أي  $u < 0$  صفر)  
المتتابعة الحسابية (ع) تكون ثابتة إذا كان أساسها (و = صفر)  
فمثلاً

في المتتابعة (١٠، ١٢، ١٤، ١٦، ١٨، ٢٠) نلاحظ أن الأساس  $2 = 12 - 10 = 14 - 12 = 16 - 14 = 18 - 16 = 20 - 18$  (عدد موجب)  
لذلك فإن المتتابعة تكون ترايدية  
وفي المتتابعة (١٠، ٨، ٦، ٤، ٢) نلاحظ أن الأساس  $-2 = 8 - 10 = 6 - 8 = 4 - 6 = 2 - 4$  (عدد سالب)  
لذلك فإن المتتابعة تكون تناقصية  
وفي المتتابعة (١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠، ١٠) نلاحظ أن الأساس  $0 = 10 - 10 = 10 - 10 = 10 - 10 = 10 - 10$  (عدد صفر)  
لذلك فإن المتتابعة تكون ثابتة

### مثال ٢

أي المتتابعات الآتية تكون متتابعة حسابية، وإذا كانت متتابعة حسابية  
فأوجد أساسها مبيئاً ما إذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة:

$$\begin{aligned} 1) (1 + u^2) &= (ع) \\ 2) (u^2 - 1) &= (ع) \\ 3) (u^3 - 2) &= (ع) \\ 4) (2 + \frac{1}{u}) &= (ع) \end{aligned}$$

### الحل

نعرف ما إذا كانت المتتابعة (ع) حسابية أم لا فإننا نوجد  $u_{n+1} - u_n$  فإذا كان  
الناتج مقدار ثابت فكانت المتتابعة (ع) حسابية وأساسها هذا المقدار الثابت.

$$1) u_{n+1} - u_n = (1 + u^2) - [1 + (1 + u)^2] = 1 + u^2 - 1 - 2 - 2u - u^2 = -2 - 2u$$

$$= -2 - 2u \quad \text{مقدار ثابت}$$

$$\therefore (1 + u^2) = (ع) \text{ متتابعة حسابية وأساسها } -2 - 2u$$

$$-2 - 2u < 0 \text{ (موجبة)} \quad \therefore \text{المتتابعة متزايدة}$$

$$2) u_{n+1} - u_n = (u^2 - 1) - [(1 + u)^2 - 1] = u^2 - 1 - 1 - 2u - u^2 + 1 = -2 - 2u$$

$$= -2 - 2u \quad \text{مقدار ثابت لأنه يعتمد على } u$$

$$\therefore (u^2 - 1) = (ع) \text{ متتابعة غير حسابية}$$



$$③ \quad [0 \cdot 3 - 2] - [(1+0) \cdot 2 - 2] = 0 \cdot 2 - 1 + 0 \cdot 2$$

$$= 3 - 2 = 0 \cdot 3 + 2 - 3 - 0 \cdot 2 - 2 =$$

$$\therefore (0 \cdot 3 - 2) = (0 \cdot 2) \text{ متتابعة حسابية وأساسها } 3 - 2 = 1$$

$\therefore 1 > 0$  (سالبة)  $\therefore$  المتتابعة متناقصة

$$④ \quad [2 + \frac{1}{0}] - [2 + \frac{1}{1+0}] = 0 \cdot 2 - 1 + 0 \cdot 2$$

$$2 - \frac{1}{0} - 2 + \frac{1}{1+0} =$$

$$\frac{1-}{(1+0) \cdot 0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{1+0} =$$

وهذا المقدار غير ثابت لأنه يعتمد على قيمة 0

$\therefore (2 + \frac{1}{0}) - (0 \cdot 2)$  ليست متتابعة حسابية

### ⑤ التمثيل البياني للمتتابعة الحسابية

لتمثيل متتابعة حسابية ولتكن  $\{10, 8, 6, 4, 2\}$

فإننا نلاحظ أن مجال المتتابعة (كما علمنا من الدرس الأول)

$$\text{هو } \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

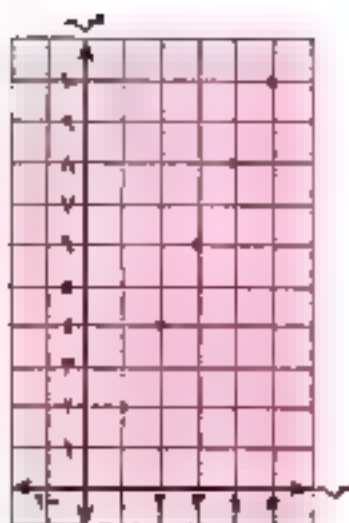
وتكون الأزواج المرتبة المثلثة لمتتابعة هي :

$$\{(10, 0), (8, 1), (6, 2), (4, 3), (2, 4)\}$$

ويمكن تمثيلها كما بالشكل المقابل ويكون

هذا الشكل هو التمثيل البياني للمتتابعة

$\{10, 8, 6, 4, 2\}$  ونلاحظ من الشكل أن :



النقط التي تمثل حدود المتتابعة الحسابية تقع على استقامة واحدة مما يعنى أن المتتابعة

الحسابية هي دالة من الدرجة الأولى في  $n$  حيث  $U \in \mathbb{R}^+$  وهو المتغير المستقل و  $U_n$

حيث  $U_n \in \mathbb{R}$  هو المتغير التابع ويكون معامل  $n$  هو أساس المتتابعة أي أن العلاقة بين

المتغيرين  $n$  و  $U_n$  هي  $U_n = n \cdot r + U_0$  حيث  $n$  و  $U_0$  ثابتان ، و  $r$  أساس المتتابعة.



### الحد النوني (الحد العام) للمتتابعة

إذا كانت  $(u_n)$  متتابعة حسابية حدها الأول  $u_1$  وأساسها  $d$  فإن  $u_n = u_1 + (n-1)d$  وكل حد يربط  
عن السابق له بمقدار  $d$

أي أن  $u_2 = u_1 + d$  ،  $u_3 = u_2 + d$  ،  $u_4 = u_3 + d$  ،  $u_5 = u_4 + d$  ، وهكذا  
ونلاحظ من ذلك أن معامل  $d$  يقل بمقدار  $d$  لوحدته عن رتبة الحد (ترتيب الحد)

فمثلاً  $u_6 = u_5 + d$  ،  $u_{10} = u_9 + d$  ، وهكذا

وبالاستمرار على هذا النمط نجد أن الحد النوني لهذه المتتابعة هو  $u_n = u_1 + (n-1)d$   
ومن ذلك يمكن تعريف الحد النوني كما يلي :

### الحد النوني للمتتابعة الحسابية

إذا رمزنا للحد الأول  $u_1$  على المتتابعة الحسابية بالرمز  $u$  وللأساس بالرمز  $d$  فإن  $u_n$   
(أي الحد الذي رتبته  $n$ ) يسمى الحد النوني أو الحد العام للمتتابعة الحسابية

حيث  $u_n = u_1 + (n-1)d$  حيث  $n \geq 1$  ،  $d \neq 0$  ،  $u$  رتبة الحد.

وإذا كان عدد حدود المتتابعة الحسابية  $n$  فإن حدها الأخير  $u_n$  يرمز له بالرمز  $l$

$$l = u_1 + (n-1)d$$

وإذا كتبنا بعض حدود المتتابعة وذلك بوضع  $u = 1$  ،  $d = 2$  ،  $3$  ، ... في الحد العام للمتتابعة  
الحسابية فإننا نحصل على المتتابعة  $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, \dots)$  وتسمى هذه  
الصورة بالصورة العامة للمتتابعة الحسابية التي حدها الأول  $u$  وأساسها  $d$

### تعيين المتتابعة الحسابية

يمكن تعيين المتتابعة الحسابية متى علم حدها الأول والأساس

فمثلاً إذا كان حدها الأول  $u = 1$  والأساس  $d = 2$  فإن

فإن المتتابعة هي  $(1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, \dots)$

### استخدام الآلة الحاسبة العلمية للكتابة متتابعة حسابية

يمكن استخدام الآلة الحاسبة العلمية لكتابة المتتابعة السابقة كما يلي :

١- نكتب قيمة  $u$  (العدد ١) ثم نضغط علامة  $=$

٢- نضع قيمة  $d$  بالضغط على  $+$  ثم (العدد ٢) ونضغط علامة  $=$  فنحصل على الحد  
الثاني للمتتابعة.



أي يكون الضغط على الأزرار بالتتابع الآتي:  $\boxed{2} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{=} \boxed{2} \boxed{=}$

**لاحظ الفرق بين (ع) و (ح) حيث (ع) ترمز للمتابعة بينما (ح) ترمز للحدوث البشري للمتابعة.**

للإيجاء رتبة أول حد مالي في المتابعة الحسابية نوجد أصغر عدد صحيح موجب

لإيجاد رتبة آخر حد موجب في المتتابعة الحسابية توجد أكبر عدد صحيح

٢٠ لإيجاد رتبة أول حد تكون قيمته أكبر من قيمة معينة  $s$  في متتابعة متزايدة

٢٠٤٢ مكان أساس المتتابعة (و < ٥) كانت المتتابعة لزايدية.

وإذا كان أساس المتتابعة  $(u_n)$  كانت المتتابعة الثابتة.

في المتابعة الحسابية الآتية (٣، ٥، ٧، ...) يوجد :

۲) رتبه اول حد تزید قیمته من ۹۸

$$Y = Y \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{J} \in Y = \mathfrak{I}$$

٢) نفرض أن الحد الذي قيمته = ٤٣ هو ج.

$$E^* = \frac{1}{2} (1 - \nu) + \frac{1}{2} \nu \quad E^* = \frac{1}{2} \nu$$

$$\sigma Y = Y - uY + Y' \therefore \quad \sigma Y = Y \times (1 - u) + Y' \therefore$$

$$\partial Y = \cup Y, \quad \mathbb{R}^n - Y + \partial Y = \cup Y.$$

$$P_1 = 0.1$$

٦. وقبة الحد الذي قيمته ٥٣ هي ٢٦ (أي أن  $h = ٥٣$ )



$$\text{حل آخر } u = 1 + \frac{1-u}{5} = 1 + \frac{1-0.2}{5} = 1 + \frac{0.8}{5} = 1.16$$

③ لإيجاد رتبة أول حد تزيد قيمته عن 98 نضع  $u < 98$

$$98 < 2 \times (1-u) + 3 \quad \therefore \quad 98 < 5(1-u) + 1 \quad \therefore$$

$$97 < 5u \quad \therefore \quad 98 < 2 - 5u + 3 \quad \therefore$$

$$48 \frac{1}{5} < u \quad \therefore$$

9. هي أصغر قيمة للعدد  $u$  تجعل  $u < 98$

∴ رتبة أول حد تزيد قيمته عن 98 هو 49 أي  $u = 49$

$$\text{حل آخر } u = 1 + \frac{1-u}{5} < u \quad \therefore \quad 1 + \frac{1-98}{5} < u \quad \therefore \quad 1 + \frac{-97}{5} < u \quad \therefore \quad u < -18.6$$

### مثال

في المتتابعة الحسابية الآتية (32, 28, 24, ..., 72) أوجد :

① رتبة أول حد سالب وأوجد قيمته ② قيمة  $u$  من البداية

③ قيمة  $u$  من النهاية ④ عدد حدود المتتابعة

### الحل

$$d = 28 - 32 = -4 \quad \therefore \quad 32 = 1$$

① لإيجاد رتبة أول حد سالب نفرض أن  $u > 0$

$$0 > 4 - x(1-u) + 32 \quad \therefore \quad 0 > 5(1-u) + 1 \quad \therefore$$

$$27 > 5u \quad \therefore \quad 0 > 4 + 5u - 32 \quad \therefore$$

$$9 < u \quad \therefore$$

∴ هي أصغر قيمة للعدد  $u$  تجعل  $u$  سالباً

∴ رتبة أول حد سالب = 10

$$u = 10 = 1 + 9 \times (-4) + 32 = -4$$

$$\text{حل آخر } u = 1 + \frac{1-u}{5} < u \quad \therefore \quad 1 + \frac{1-32}{5} < u \quad \therefore \quad 1 + \frac{-31}{5} < u \quad \therefore$$

$$-5.2 < u \quad \therefore \quad \therefore \text{رتبة أول حد سالب} = 10$$



$$19 = 1 + 12 + 32 = 1 \times 12 + 32 = 19 \quad \text{ع ٢}$$

٣ لإيجاد ع من النهاية فإن المتتالية تكون معكوسة وتصبح  $1 + 5 + 72 = 78$

$$78 = 1 + 5 + 72 = 1 \times 8 + 72 = 78 \quad \text{ع ٣}$$

٤ لإيجاد عدد حدود المتتالية نوجد رتبة آخر حد فيها

$$1 + (1 - 1) + 32 = 72 \quad \therefore \quad 1 + (1 - 1) = 1$$

$$72 = 1 + 1 + 32 = 34 \quad \therefore \quad 1 + 1 + 32 = 34$$

$\therefore$  عدد حدود المتتالية = 34

$$\text{حل آخر} \quad 1 + \frac{32 - 72}{1} = 1 + \frac{1 - 1}{1} = 1 \quad \therefore \quad 19 = 1 + \frac{32 - 72}{1} = 1 + \frac{1 - 1}{1} = 1$$

مثال

متتالية حسابية فيها  $1 + 2 + 3 + \dots + 30 = 465$  أوجد المتتالية وأوجد رتبة آخر حد موجب فيها ، وإذا كان  $-30$  أحد حدود هذه المتتالية فما رتبته .

الحل

$$30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$1 \rightarrow 30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$2 \rightarrow 30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

ويحل المعادلتين ١ ، ٢ :

$$30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$\text{بالمضرب } 2 \text{ والجمع} \quad 30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$9 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$39 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

وبالتعويض في المعادلة ٢ :

$$30 = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$$

$\therefore$  المتتالية هي ( ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ )

لإيجاد رتبة آخر حد موجب فيها نفرض أن ع < ٠



$$1 < 4 - x(1 - u) + 25 \therefore$$

$$29 < 4 - u \therefore$$

$$1 < 4(1 - u) + 1 \therefore$$

$$1 < 4 + 4 - 25 \therefore$$

$$2\frac{1}{4} > u \therefore$$

أخرج حد موجب هو  $\frac{1}{4}$

لايجاد رتبة الحد الذي قيمته  $25 -$  نعرض أن  $25 - =$

$$25 - = 4 - x(1 - u) + 25 \therefore$$

$$25 - = 4(1 - u) + 1 \therefore$$

$$16 = u \therefore$$

$$25 - = 4 + 4 - 25 \therefore$$

$$\text{حل آخر } u = \frac{25 - 25 -}{4 - 1} = 16$$

$$25 - = 16 \therefore$$

يمكن استخدام آلة الحاسبة فتأكد من صحة حل المعادلتين

$$25 - = 4 + 4 - 25 \therefore$$

بإتباع الخطوات التالية ،

1 اضغط على مفتاح العمليات **Mode** ونختار من القائمة EQN وذلك بكتابة الرقم

المكتوب أمامها وغالباً 5 أو 3 في بعض الآلات ثم نختار المعادلة الخطية  $ax + by = c$

وذلك بالضغط على المفتاح **1**

2 ندخل معاملات  $(a)$  ،  $(b)$  والحد المطلق بالترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية

مباشرة ونضغط على الأزوار من اليسار إلى اليمين مباشرة على النحو التالي :

أبدأ  $\rightarrow$  **2** **=** **5** **=** **3** **0** **=** **1** **=** **7** **=** **3** **=** **3**

3 الاستدعاء النتائج ،

نضغط على المفتاح **=** للمرة الأولى يعطى قيمة المتغير الأول  $x$  ويكون الناتج  $x = 25$

ثم نضغط على المفتاح **=** مرة أخرى يعطى قيمة المتغير الثاني  $y$  ويكون الناتج  $y = 4$

الخروج من البرنامج نضغط على مفتاح **1** **Mode** أبدأ  $\rightarrow$



مثال

إذا كان مجموع الحد الثالث والحد الخامس من متتابعة حسابية هو ١٦ وحاصل ضرب حدها الثاني في حدها السادس = ٤٨ فأوجد المتتابعة

### الحل

$$17 = 2 + 15$$

$$17 = 9 + 8$$

$$A^* - A = I_n$$

$$t_A = \gamma_L \times \gamma_L = 1$$

$$\textcircled{2} \leftarrow \text{if } A = (s \oplus t)(s + t) \therefore$$

وبالتعويض من ① في المعادلة ② :

$$I_A = (I_0 + I_T - A)(I + I_T - A) \therefore$$

$$EA = (EY + A)(EY - A) \therefore$$

$t = 5.5$

**وبالتعويض في المعادلة ①:**

عندما  $t = 0$

$y = f(x)$  عندما  $x = 0$

$\eta = 1.5$

٢٠ يوجد متتابعتان الأولى هي (٢، ٤، ٦، ...) والثانية هي (١٤، ١٢، ١٠، ...)

مثال

**فأوجد قيمة كل من:**  $m$ ,  $n$  وكذا رتبة حدها الأخير

## الحل

### ٢٠: المحتايعة حمايية

$\beta = 0.5$

$$1 = 1.5$$

$$1 - 14 = 1 \text{ } \therefore$$

∴ الحد الأخير  $= 1$  ،  $1 + (1-u) + \dots = 1$  ،

$$P = 0P + Q = PQ, \quad Px(1-0) + Q = PQ, \therefore$$

$$11 = 0 \therefore \quad r + q - r q = 0 \therefore$$

١٠ الحمد الأخير هو ح



## مثال

ثلاث أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعها ١٥ ومجموع مربعاتها ٩٣  
أوجد هذه الأعداد.

## الحل

### دلائل

في جميع المعادلات التي يدكر فيها  
مجموع ثلاث حدود في متتابعة  
حسابية نفرض أن الحدود  
 $x + 1, x + 2, x + 3$   
وإذا كان  $x$  حدود نفرضها  
 $x + 1, x + 2, x + 3$   
وهكذا لتسهيل الحل

نفرض أن الأعداد الثلاثة التي تكون المتتابعة هي :

$$x + 1, x + 2, x + 3 \quad \therefore x + 1 + x + 2 + x + 3 = 15$$

$$x + 1 = 1 \quad \therefore x = 0$$

$$93 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2$$

$$93 = (x + 0)^2 + 0^2 + (x + 0)^2$$

$$93 = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

$$93 = 3x^2 \quad \therefore x^2 = 31$$

$$x = \pm \sqrt{31}$$

$$\text{إذا كانت } x = 3$$

$$\text{إذا كانت } x = -3$$

$$\therefore \text{الأعداد هي } 8, 5, 2$$

$$\therefore \text{الأعداد هي } 2, 5, 8$$

## مثال

أثبت أنه لا يوجد حد قيمته ١٥١ في المتتابعة الحسابية (١٣، ١٧، ٢١، ...)

## الحل

لمعرفة ما إذا كان يوجد حد قيمته ١٥١ أم لا فإننا نوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥١

فإذا كانت عدد صحيح موجب فهذا يعني أنه يوجد حد قيمته ١٥١

أما إذا كانت رتبة الحد (n) سالبة أو كسرية فهذا معناه أنه لا يوجد حد قيمته ١٥١

$$13 = 1 \quad 17 = 2 \quad 21 = 3 \quad \therefore 13 - 17 = -4$$

$$\therefore \text{لايجاد قيمة } n \text{ نفرض أن } 151 =$$

$$151 = 4 \times (1 - n) + 13$$

$$151 = 4(1 - n) + 13$$

$$4 + 13 - 151 = 4n$$

$$151 = 4 - 4n + 13$$

$$112 = 4n$$

$$\therefore n = 28 \text{ وهذا لا يمكن}$$

$$\therefore \text{لا يوجد حد قيمته ١٥١}$$



# تمرين

في مادة الرياضيات

السؤال الثاني  
عندما نرى  
العدد ١٠  
نجد أنه

أحد مضاعفات ١٠

اختبار

الدرجة



أجب عن الأسئلة الآتية :

١) العدد الخامس في المتتابعة  $u_n = 2n - 1$  هو .....

[ ٩   ٦   ٥   ٤   ١١ ]

٢) المتتابعة التي حدها القوي  $u_n = 3 - n$  هي متتابعة .....

[ تزايدية   تناقصية   ثابتة   قديبية ]

٣) قيمة المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - n)$  هو .....

[ ١٠   ٢٠   ٢٥   ٣٠ ]

٤)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \dots\dots\dots$   
[ ١٠   ٢٠   ٢٥   ٣٠ ]

٥) أكتب مكوّن كل من المتسلسلات الآتية :

(أ)  $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - n)$

.....

(ب)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^2$

.....

٦) أكتب الخمسة حدود الأولى لكل من المتتابعات التي حدها العام يعطى

بالقواعد الآتية :

(أ)  $u_n = n + 2$

.....

(ب)  $u_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2$

.....



### مسائل المستوى الأول

**حدد أيًا من المتتابعات الآتية حسابية واجها غير حسابية ثم أوجد الأساس في حالة كونها حسابية :**

(Y A C Y E C Y G C Y D C Y I) (2)      (Y E C Y I C Y A C Y D C Y V) (1)

(Y6Y6Y6Y6Y) (Y9-6Y3-6Y5-6Y5-60-) (Y)

⑤ (س ۲ + س ۲۴ + س ۳ + س ۴۸ + س ۱۰۰) حدیثیں، جس حکمیتان موجود ہیں

٣ اكتب الخمسة حدود الأولى للمتتابعة الحسابية في كل من الحالات الآتية :

$$\frac{1}{1} = 1 \text{ 6 } 1 = 1 \text{ ②} \quad 2 = 1 \text{ 6 } 2 = 1 \text{ ②} \quad 0 = 1 \text{ 6 } 0 = 1 \text{ ①}$$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

① تعمى، المتتابعة (ع) متتابعة حسابية إذا كان  $u_n - u_{n-1} = c$

$\left[ \begin{array}{l} < \text{مقدار ثابت} \\ = \text{مقدار ثابت} \\ > \text{مقدار ثابت} \end{array} \right] = \text{سفر}$

٢) أساس المتابعة الحسابية و =

$$[1+uL \quad uL - 1+uL \quad \frac{uL}{1+uL} \quad \frac{1+uL}{uL}]$$

$$[s(1+u) \text{ d } (1-u) \text{ d } s \text{ d } s(1-u)] \dots + 1 = uZ \text{ ③}$$

④  $(2, 1) = (1 + 0, 2)$  متتابعة حسابية فإن :

[**▲** **♠** **♥** **♣** **♠** **♣** **♥**]

**اولاً : اساسيات**

[ ० १ २ ३ ४ ५ ]

**ثانياً** **محلها الأول** = **محلها الأول**

**(٥) الحد السابع للمقتاربة الحسابية** (٤٨٤٥٤٢ ... ) هو  $\frac{1}{\sqrt{n}}$

[T, d, w, d, w, d, w]

⑥ الحد الحادي عشر من المتتابعة (ع) حيث  $u_3 = 0$  هو

[ 7 4 2 4 2 4 2 ]

٧) الحد التولي للمتابعة الحسابية (٨٩، ٧٧، ٧٣، ٧٠) هو  $\frac{1}{2}$ .

$$[A_0 - U \quad d \quad U_1 - A_0 \quad d \quad A_0 + U_1 \quad d \quad A_0 - U_1]$$



٨) الحد الثوبى للمتتالية الحسابية  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \text{صفر}, \dots)$  هو  $\dots = \dots$

$$[\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \quad \text{d} \quad \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \quad \text{d} \quad \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{d} \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{4}]$$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١)  $(\frac{1}{4}) = (5 - 3) =$  متتالية حسابية أساسها  $\dots = \dots$

$$[2 \quad \text{d} \quad 3 - \quad \text{d} \quad 3 \quad \text{d} \quad 5]$$

٢) الحد الثوبى للمتتالية الحسابية  $(2, 5, 8, 11, \dots)$  هو  $\dots = \dots$

$$[3 - \quad \text{d} \quad 1 - \quad \text{d} \quad 1 - \quad \text{d} \quad 1 + \quad \text{d} \quad 3]$$

٣) عدد حدود المتتالية  $(2, 4, 6, \dots, 12)$  هو  $\dots$

$$[12 \quad \text{d} \quad 6 \quad \text{d} \quad 5 \quad \text{d} \quad 4]$$

٤) جميع المتتابعات الآتية حسابية ما عدا المتتالية  $\dots$

$$[\dots \quad \text{d} \quad (\dots, 10, 11, 12, \dots) \quad \text{d} \quad (\dots, 11, 10, 9, \dots) \quad \text{d} \quad (\dots, 11, 10, 9, \dots)]$$

$$[(\dots, \frac{3}{5}, \frac{11}{5}, \frac{19}{5}, \frac{27}{5}, \dots) \quad \text{d} \quad (\dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots)]$$

٥) المتتالية الحسابية من بين المتتابعات الآتية هي  $\dots$

$$[\dots \quad \text{d} \quad (1 + \frac{1}{n}) = (\dots) \quad \text{d} \quad (1 + \frac{1}{n}) = (\dots)]$$

$$[(\frac{1 - 2^n}{1 + n + 2^n}) = (\dots) \quad \text{d} \quad ((2 + n) \frac{3}{n}) = (\dots)]$$

٦) أوجد:

١) قيمة الحد السابع من المتتالية الحسابية  $(2, 5, 8, \dots)$

٢)  $u_8, u_8, u_{16}$  من المتتالية الحسابية  $(3, 6, 9, \dots)$

٧) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) متتالية حسابية أساسها ١ وحدها الخامس عشر = ١٠ فإن حدها الأول  $\dots$

$$[4 - \quad \text{d} \quad 16 \quad \text{d} \quad 10 \quad \text{d} \quad 16 -]$$

٢) متتالية حسابية أساسها ٣ وحدها التاسع = ٢١ فإن حدها الأول  $\dots$

$$[3 \quad \text{d} \quad \text{صفر} \quad \text{d} \quad 3 - \quad \text{d} \quad 18]$$

٣) متتالية حسابية حدها الأول = ٢١ وحدها العشرون = ٣٩ فإن هو أساسها  $\dots$

$$[9 \quad \text{d} \quad 3 - \quad \text{d} \quad 3 \quad \text{d} \quad \text{صفر}]$$



### ثالثاً مسائل المستوى الثاني

٨١) بين أن المتتابعة (ع<sub>n</sub>) = ٢ + ١ تكون متتابعة حسابية ثم أوجد قيمة حدّها الثامن. [١٣]

٢) أثبت أن المتتابعة  $(x_n)$  هي متتابعة حسابية وأوجد أساسها ثم

الكتب الأربعة حدود الأولى منها.

أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية (٦٧، ٦٤، ٦١، ...) ( $a_1 = 67$ )

**١٩** في المتابعة الحسابية (١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩) أوجد الحد العاشر ثم أوجد عدد حدود هذه المتتابعة.

١١ أوجد  $\sum_{k=1}^n k^2$  ثم أوجد رتبة آخر حد موجب في المتتالية الحسابية (١٧، ١٥، ١٣، .....). [٩١١]

أوجد الحد السابع من المتتابعة الحسابية (١٩، ٤٨، ٤٥، ...) ثم أثبت أنه لا يوجد فيها حد يساوي صفر.

١٢) اكتب الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة  $(ح_n) = (٢ + ٥n)$  ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧٧ من المتتابعة وأوجد رتبة أول حد قيمته تزيد عن ١٠٠

١٤ متتابعة حسابية حدها الثاني = ٤ وحدها التاسع = ١٧ أوجد المتتابعة ثم أوجد الحد العشرين منها.

١٥) متتابعة حسابية فيها  $u_6 = 16$ ،  $u_7 = 21$  أوجد المتتابعة ثم أوجد الحد السابع والعشرين فيها.

١٦  أوجد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = ٣١ وحدها العاشر = ثلاثة أمثال حدها الثاني.

١٧) متتابعة حسابية حدها الرابع = ١١ ومجموع حديها الخامس والسادس = ٤٠  
أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ١٥٢ في هذه المتتابعة {١٩٤, ..., ٨٤, ٥٤, ٢٤}

١٨ (ع) متتابعة حسابية فيها  $u_1 = 1, u_2 = 9, u_3 = 25$  أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي ٩٢



١٦ (ع) متتابعة حسابية فيها  $u_1 = 1$ ،  $u_2 = 2$ ،  $u_3 = 3$  أوجد الحد التوني لهذه المتتابعة ومنه أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب فيها.

$$[u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \dots]$$

١٧ ثلاثة أعداد في تتابع حسابي مجموعهم  $= 15$  وحاصل ضربهم  $= 10$  أوجد هذه الأعداد الثلاثة.

$$[7, 5, 3]$$

١٨ متتابعة حسابية حدها الثاني ضعف حدها الرابع وحدها العاشر ينقص عن ضعف حدها السابع بمقدار ٦ أوجد المتتابعة.

$$[1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261, 263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 351, 353, 355, 357, 359, 361, 363, 365, 367, 369, 371, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401, 403, 405, 407, 409, 411, 413, 415, 417, 419, 421, 423, 425, 427, 429, 431, 433, 435, 437, 439, 441, 443, 445, 447, 449, 451, 453, 455, 457, 459, 461, 463, 465, 467, 469, 471, 473, 475, 477, 479, 481, 483, 485, 487, 489, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 503, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 523, 525, 527, 529, 531, 533, 535, 537, 539, 541, 543, 545, 547, 549, 551, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 565, 567, 569, 571, 573, 575, 577, 579, 581, 583, 585, 587, 589, 591, 593, 595, 597, 599, 601, 603, 605, 607, 609, 611, 613, 615, 617, 619, 621, 623, 625, 627, 629, 631, 633, 635, 637, 639, 641, 643, 645, 647, 649, 651, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 671, 673, 675, 677, 679, 681, 683, 685, 687, 689, 691, 693, 695, 697, 699, 701, 703, 705, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 725, 727, 729, 731, 733, 735, 737, 739, 741, 743, 745, 747, 749, 751, 753, 755, 757, 759, 761, 763, 765, 767, 769, 771, 773, 775, 777, 779, 781, 783, 785, 787, 789, 791, 793, 795, 797, 799, 801, 803, 805, 807, 809, 811, 813, 815, 817, 819, 821, 823, 825, 827, 829, 831, 833, 835, 837, 839, 841, 843, 845, 847, 849, 851, 853, 855, 857, 859, 861, 863, 865, 867, 869, 871, 873, 875, 877, 879, 881, 883, 885, 887, 889, 891, 893, 895, 897, 899, 901, 903, 905, 907, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925, 927, 929, 931, 933, 935, 937, 939, 941, 943, 945, 947, 949, 951, 953, 955, 957, 959, 961, 963, 965, 967, 969, 971, 973, 975, 977, 979, 981, 983, 985, 987, 989, 991, 993, 995, 997, 999, 1001, 1003, 1005, 1007, 1009, 1011, 1013, 1015, 1017, 1019, 1021, 1023, 1025, 1027, 1029, 1031, 1033, 1035, 1037, 1039, 1041, 1043, 1045, 1047, 1049, 1051, 1053, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1065, 1067, 1069, 1071, 1073, 1075, 1077, 1079, 1081, 1083, 1085, 1087, 1089, 1091, 1093, 1095, 1097, 1099, 1101, 1103, 1105, 1107, 1109, 1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1121, 1123, 1125, 1127, 1129, 1131, 1133, 1135, 1137, 1139, 1141, 1143, 1145, 1147, 1149, 1151, 1153, 1155, 1157, 1159, 1161, 1163, 1165, 1167, 1169, 1171, 1173, 1175, 1177, 1179, 1181, 1183, 1185, 1187, 1189, 1191, 1193, 1195, 1197, 1199, 1201, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1213, 1215, 1217, 1219, 1221, 1223, 1225, 1227, 1229, 1231, 1233, 1235, 1237, 1239, 1241, 1243, 1245, 1247, 1249, 1251, 1253, 1255, 1257, 1259, 1261, 1263, 1265, 1267, 1269, 1271, 1273, 1275, 1277, 1279, 1281, 1283, 1285, 1287, 1289, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299, 1301, 1303, 1305, 1307, 1309, 1311, 1313, 1315, 1317, 1319, 1321, 1323, 1325, 1327, 1329, 1331, 1333, 1335, 1337, 1339, 1341, 1343, 1345, 1347, 1349, 1351, 1353, 1355, 1357, 1359, 1361, 1363, 1365, 1367, 1369, 1371, 1373, 1375, 1377, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1389, 1391, 1393, 1395, 1397, 1399, 1401, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1413, 1415, 1417, 1419, 1421, 1423, 1425, 1427, 1429, 1431, 1433, 1435, 1437, 1439, 1441, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451, 1453, 1455, 1457, 1459, 1461, 1463, 1465, 1467, 1469, 1471, 1473, 1475, 1477, 1479, 1481, 1483, 1485, 1487, 1489, 1491, 1493, 1495, 1497, 1499, 1501, 1503, 1505, 1507, 1509, 1511, 1513, 1515, 1517, 1519, 1521, 1523, 1525, 1527, 1529, 1531, 1533, 1535, 1537, 1539, 1541, 1543, 1545, 1547, 1549, 1551, 1553, 1555, 1557, 1559, 1561, 1563, 1565, 1567, 1569, 1571, 1573, 1575, 1577, 1579, 1581, 1583, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1599, 1601, 1603, 1605, 1607, 1609, 1611, 1613, 1615, 1617, 1619, 1621, 1623, 1625, 1627, 1629, 1631, 1633, 1635, 1637, 1639, 1641, 1643, 1645, 1647, 1649, 1651, 1653, 1655, 1657, 1659, 1661, 1663, 1665, 1667, 1669, 1671, 1673, 1675, 1677, 1679, 1681, 1683, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1699, 1701, 1703, 1705, 1707, 1709, 1711, 1713, 1715, 1717, 1719, 1721, 1723, 1725, 1727, 1729, 1731, 1733, 1735, 1737, 1739, 1741, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1755, 1757, 1759, 1761, 1763, 1765, 1767, 1769, 1771, 1773, 1775, 1777, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1791, 1793, 1795, 1797, 1799, 1801, 1803, 1805, 1807, 1809, 1811, 1813, 1815, 1817, 1819, 1821, 1823, 1825, 1827, 1829, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1843, 1845, 1847, 1849, 1851, 1853, 1855, 1857, 1859, 1861, 1863, 1865, 1867, 1869, 1871, 1873, 1875, 1877, 1879, 1881, 1883, 1885, 1887, 1889, 1891, 1893, 1895, 1897, 1899, 1901, 1903, 1905, 1907, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1919, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1931, 1933, 1935, 1937, 1939, 1941, 1943, 1945, 1947, 1949, 1951, 1953, 1955, 1957, 1959, 1961, 1963, 1965, 1967, 1969, 1971, 1973, 1975, 1977, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025, 2027, 2029, 2031, 2033, 2035, 2037, 2039, 2041, 2043, 2045, 2047, 2049, 2051, 2053, 2055, 2057, 2059, 2061, 2063, 2065, 2067, 2069, 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2085, 2087, 2089, 2091, 2093, 2095, 2097, 2099, 2101, 2103, 2105, 2107, 2109, 2111, 2113, 2115, 2117, 2119, 2121, 2123, 2125, 2127, 2129, 2131, 2133, 2135, 2137, 2139, 2141, 2143, 2145, 2147, 2149, 2151, 2153, 2155, 2157, 2159, 2161, 2163, 2165, 2167, 2169, 2171, 2173, 2175, 2177, 2179, 2181, 2183, 2185, 2187, 2189, 2191, 2193, 2195, 2197, 2199, 2201, 2203, 2205, 2207, 2209, 2211, 2213, 2215, 2217, 2219, 2221, 2223, 2225, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2239, 2241, 2243, 2245, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2257, 2259, 2261, 2263, 2265, 2267, 2269, 2271, 2273, 2275, 2277, 2279, 2281, 2283, 2285, 2287, 2289, 2291, 2293, 2295, 2297, 2299, 2301, 2303, 2305, 2307, 2309, 2311, 2313, 2315, 2317, 2319, 2321, 2323, 2325, 2327, 2329, 2331, 2333, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343, 2345, 2347, 2349, 2351, 2353, 2355, 2357, 2359, 2361, 2363, 2365, 2367, 2369, 2371, 2373, 2375, 2377, 2379, 2381, 2383, 2385, 2387, 2389, 2391, 2393, 2395, 2397, 2399, 2401, 2403, 2405, 2407, 2409, 2411, 2413, 2415, 2417, 2419, 2421, 2423, 2425, 2427, 2429, 2431, 2433, 2435, 2437, 2439, 2441, 2443, 2445, 2447, 2449, 2451, 2453, 2455, 2457, 2459, 2461, 2463, 2465, 2467, 2469, 2471, 2473, 2475, 2477, 2479, 2481, 2483, 2485, 2487, 2489, 2491, 2493, 2495, 2497, 2499, 2501, 2503, 2505, 2507, 2509, 2511, 2513, 2515, 2517, 2519, 2521, 2523, 2525, 2527, 2529, 2531, 2533, 2535, 2537, 2539, 2541, 2543, 2545, 2547, 2549, 2551, 2553, 2555, 2557, 2559, 2561, 2563, 2565, 2567, 2569, 2571, 2573, 2575, 2577, 2579, 2581, 2583, 2585, 2587, 2589, 2591, 2593, 2595, 2597, 2599, 2601, 2603, 2605, 2607, 2609, 2611, 2613, 2615, 2617, 2619, 2621, 2623, 2625, 2627, 2629, 2631, 2633, 2635, 2637, 2639, 2641, 2643, 2645, 2647, 2649, 2651, 2653, 2655, 2657, 2659, 2661, 2663, 2665, 2667, 2669, 2671, 2673, 2675, 2677, 2679, 2681, 2683, 2685, 2687, 2689, 2691, 2693, 2695, 2697, 2699, 2701, 2703, 2705, 2707, 2709, 2711, 2713, 2715, 2717, 2719, 2721, 2723, 2725, 2727, 2729, 2731, 2733, 2735, 2737, 2739, 2741, 2743, 2745, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2759, 2761, 2763, 2765, 2767, 2769, 2771, 2773, 2775, 2777, 2779, 2781, 2783, 2785, 2787, 2789, 2791, 2793, 2795, 2797, 2799, 2801, 2803, 2805, 2807, 2809, 2811, 2813, 2815, 2817, 2819, 2821, 2823, 2825, 2827, 2829, 2831, 2833, 2835, 2837, 2839, 2841, 2843, 2845, 2847, 2849, 2851, 2853, 2855, 2857, 2859, 2861, 2863, 2865, 2867, 2869, 2871, 2873, 2875, 2877, 2879, 2881, 2883, 2885, 2887, 2889, 2891, 2893, 2895, 2897, 2899, 2901, 2903, 2905, 2907, 2909, 2911, 2913, 2915, 2917, 2919, 2921, 2923, 2925, 2927, 2929, 2931, 2933, 2935, 2937, 2939, 2941, 2943, 2945, 2947, 2949, 2951, 2953, 2955, 2957, 2959, 2961, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2973, 2975, 2977, 2979, 2981, 2983, 2985, 2987, 2989, 2991, 2993, 2995, 2997, 2999, 3001, 3003, 3005, 3007, 3009, 3011, 3013, 3015, 3017, 3019, 3021, 3023, 3025, 3027, 3029, 3031, 3033, 3035, 3037, 3039, 3041, 3043, 3045, 3047, 3049, 3051, 3053, 3055, 3057, 3059, 3061, 3063, 3065, 3067, 3069, 3071, 3073, 3075, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3087, 3089, 3091, 3093, 3095, 3097, 3099, 3101, 3103, 3105, 3107, 3109, 3111, 3113, 3115, 3117, 3119, 3121, 3123, 3125, 3127, 3129, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3141, 3143, 3145, 3147, 3149, 3151, 3153, 3155, 3157, 3159, 3161, 3163, 3165, 3167, 3169, 3171, 3173, 3175, 3177, 3179, 3181, 3183, 3185, 3187, 3189, 3191, 3193, 3195, 3197, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3211, 3213, 3215, 3217, 3219, 3221, 3223, 3225, 3227, 3229, 3231, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3243, 3245, 3247, 3249, 3251, 3253, 3255, 3257, 3259, 3261, 3263, 3265, 3267, 3269, 3271, 3273, 3275, 3277, 3279, 3281, 3283, 3285, 3287, 3289, 3291, 3293, 3295, 3297, 3299, 3301, 3303, 3305, 3307, 3309, 3311, 3313, 3315, 3317, 3319, 3321, 3323, 3325, 3327, 3329, 3331, 3333, 3335, 3337, 3339, 3341, 3343, 3345, 3347, 3349, 3351, 3353, 3355, 3357, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3369, 3371, 3373, 3375, 3377, 3379, 3381, 3383, 3385, 3387, 3389, 3391, 3393, 3395, 3397, 3399, 3401, 3403, 3405, 3407, 3409, 3411, 3413, 3415, 3417, 3419, 3421, 3423, 3425, 3427, 3429, 3431, 3433, 3435, 3437, 3439, 3441, 3443, 3445, 3447, 3449, 3451, 3453, 3455, 3457, 3459, 3461, 3463, 3465, 3467, 3469, 3471, 3473, 3475, 3477, 3479, 3481, 3483, 3485, 3487, 3489, 3491, 3493, 3495, 3497, 3499, 3501, 3503, 3505, 3507, 3509, 3511, 3513, 3515, 3517, 3519, 3521, 3523, 3525, 3527, 3529, 3531, 3533, 3535, 3537, 3539, 3541, 3543, 3545, 3547, 3549, 3551, 3553, 3555, 3557, 3559, 3561, 3563, 3565, 3567, 3569, 3571, 3573, 3575, 3577, 3579, 3581, 3583, 3585, 3587, 3589, 3591, 3593, 3595, 3597, 3599, 3601, 3603, 3605, 3607, 3609, 3611, 3613, 3615, 3617, 3619, 3621, 3623, 3625, 3627, 3629, 3631, 3633, 3635, 3637, 3639, 3641, 3643, 3645, 3647, 3649, 3651, 3653, 3655, 3657, 3659, 3661, 3663, 3665, 3667, 3669, 3671, 3673, 3675, 3677, 3679, 3681, 3683, 3685, 3687, 3689, 3691, 3693, 3695, 3697, 3699, 3701, 3703, 3705, 3707, 3709, 3711, 3713, 3715, 3717, 3719, 3721, 3723, 3725, 3727, 3729, 3731, 3733, 3735, 3737, 3739, 3741, 3743, 3745, 3747, 3749, 3751, 3753, 3755, 3757, 3759, 3761, 3763, 3765, 3767, 3769, 3771, 3773, 3775, 3777, 3779, 3781, 3783, 3785, 3787, 3789, 3791, 3793, 3795, 3797, 3799, 3801, 3803, 3805, 3807, 3809, 3811, 3813, 3815, 3817, 3819, 3821, 3823, 3825, 3827, 3829, 3831, 3833, 3835, 3837, 3839, 3841, 3843, 3845, 3847, 3849, 3851, 3853, 3855, 3857, 3859, 3861, 3863, 3865, 3867, 3869, 3871, 3873, 3875, 3877, 3879, 3881, 3883, 3885, 3887, 3889, 3891, 3893, 3895, 3897, 3899, 3901, 3903, 3905, 3907, 3909, 3911, 3913, 3915, 3917, 3919, 3921, 3923, 3925, 3927, 3929, 3931, 3933, 3935, 3937, 3939, 3941, 3943, 3945, 3947, 3949, 3951, 3953, 3955, 3957, 3959, 3961, 3963, 3965, 3967, 3969, 3971, 3973, 3975, 3977, 3979, 3981, 3983, 3985, 3987, 3989, 3991, 3993, 3995, 3997, 3999, 4001, 4003, 4005, 4007, 4009, 4011, 4013, 4015, 4017, 4019, 4021, 4023, 4025, 4027, 4029, 4031, 4033, 4035, 4037, 4039, 4041, 4043, 4045, 4047, 4049, 4051, 4053, 4055, 4057, 4059, 4061, 4063, 4065, 4067, 4069, 4071, 4073, 4075, 4077, 4079, 4081, 4083, 4085, 4087, 4089, 4091, 4093, 4095, 4097, 4099, 4101, 4103, 4105, 4107, 4109, 4111, 4113, 4115, 4117, 4119, 4121, 4123, 4125, 4127, 4129, 4131, 4133, 4135, 4137, 4139, 4141, 4143, 4145, 4147, 4149, 4151, 4153, 4155, 4157, 415$$







٧) عدد حدود المتتابعة الحسابية (٣) من ٤٧٤ ... ٨٤ ... ١ يساوي .....

[ ١٠ د ١٩ د ٢٠ د ٢٦ ]

٨) عدد الحدود فردية الرتبة من حدود المتتابعة الحسابية (٢) ٨٤٥ ... ١٨٤ يساوي .....

[ ١٨ د ٢٠ د ١٩ د ٢٧ ]

٩) إذا كان (٢) ٥٤١ - ٦٤١ + ٣ متتابعة حسابية فإن  $u = \dots$

[ ١ د ٢ د ٣ د ٥ ]

١٠) متتابعة حسابية حدها الأول = ٣٥ وأساسها عدد صحيح،  $u$  هو أول حد سالب

فإن  $u = \dots$  [ ١- د ٢- د ٣- د ٤- ]

١١) متتابعة حسابية حدها الأول = ٥١ وأساسها عدد صحيح،  $u$  هو أول حد موجب

فإن  $u = \dots$  [ ١ د ٢ د ٣ د ٤ ]

١٢) متتابعة حسابية فيها  $u = ٤٥$ ،  $u_٢ = ٢١$ ،  $u_٣ = ٤١$

فإن  $u = \dots$  [ ٤ د ٥ د ٦ د ٧ ]

١٣) إذا كان (١) ٤٧٤ ... ٢٥٤ تكون متتابعة حسابية وكانت  $u = ١٥ + ٢$

فإن عدد حدود المتتابعة = ..... [ ٧ د ٨ د ٩ د ١٠ ]

١٤) في أي متتابعة حسابية يكون  $u_٣ + u_٥ - u_٢ = \dots$

[  $u_٤$  د  $u_٨$  د  $u_٦$  د  $u_١$  ]

١٥) إذا كان (١) متتابعة حسابية فيها  $u = ٢$ ،  $u_٢ = ٤$ ، فإن أساس المتتابعة = .....

[  $u + ٢$  د  $u - ٢$  د  $u - u$  د  $٢ - u$  ]

١٦) متتابعة حسابية فيها  $u = ١$ ،  $u_٢ = ١$ ، فإن  $u + ٢ = \dots$

[  $u + ٢$  د  $u \times ٢$  د  $u - ٢$  د  $\frac{٢}{u}$  ]

١٧) أربعة أعداد تكون متتابعة حسابية مجموعهم ٢٠ ومجموع مقلوبى الحدين الثانى

والثالث يساوى  $\frac{٥}{١١}$  فإن الأعداد هي .....

[ ٨٤٦٤٤٤٢ د ٩٠٨٤٦٤٤ د ١٢٤٩٦٤٣ د ٧٤٥٣٤١ ]

١٨) إذا كان  $u_٢ + u_٤$  من المتتابعة الحسابية  $\frac{١}{١٣}$ ،  $\frac{١}{١٤}$ ،  $\frac{١}{١٣}$  ... يساوى  $u + u_٦$

من المتتابعة الحسابية  $\frac{١}{٤٦}$ ،  $\frac{١}{٤٣}$ ،  $\frac{١}{٤٤}$  ... فإن  $u = \dots$

[ ١ د ٢ د ٣ د ٤ ]



[الرابع] d الخامس d السادس d السابع]

إذا كان الحد الأول والثالث من متتابعة حسابية يساويان على الترتيب الحدين الثاني والخامس من متتابعة أخرى **فلذلك** أن الحد الخامس من المتتابعة الأولى يساوي الحد الثامن من المتتابعة الثانية.

متتابعة حسابية فيها  $u_3 = 30$  ووسطا متناهيين  $u_1, u_{11}$  أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٦٦

٤٩) (س، ص، ع، ل، ...) متتابعة حسابية فيها  $s = l + ٤$ ،  $v = e + ٢$ ،  $s = ١٠$  أوجد المتتابعة.

فأوجد الحد العام للمتتابعة وأوجد رتبة أول حد تقل قيمته عن  $-5$   $\{1, 4, 9, \dots\}$  متتابعة حسابية متناقصة فإذا كان  $1 = a_1, 4 = a_2, 9 = a_3, \dots$

**التمرين ١٤** متتابعة معرفة بحيث  $x_0 = -1$ ,  $x_{n+1} = x_n + 5$ ,  $(x'_n)$  متتابعة أخرى معرفة بحيث  $y_n = x_n + 7$ . **أثبت** أن كلا من  $(x_n)$ ,  $(x'_n)$  متتابعتان حسابية وأوجد كلا منهما ثم أوجد أول حد موجب في المتتابعة  $(x'_n)$ .





## الوساط الحسابية

## الدرس

٣

إذا كانت  $a, b, c$  هي ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن  $b$  تعرف بالوسط الحسابي بين  $a$  و  $c$ . وقد علمنا مما سبق أن الأساس = أي حد - السابق له أي أنه في المتتالية  $(a, b, c)$  يكون:  $b - a = c - b$  و  $b = \frac{a+c}{2}$

وعلمنا في السنوات السابقة أن الوسط الحسابي لأي عددين يساوي مجموع العددين  $\div 2$  وعليه فإن الوسط الحسابي للحددين  $a$  و  $c$  هو  $\frac{a+c}{2}$  وهو ما يتوافق مع ما ندرسه الآن ومن ذلك نلاحظ أن الوسط الحسابي لأي حدين عند وضعه بين الحدين فإن الحدود الثلاثة تكون متتابعة حسابية.

**أولاً**  $(a, b, c)$  أو  $(a, \frac{a+c}{2}, c)$  متتابعة حسابية وإذا كانت المتتابعة الحسابية لتكون من أربعة حدود مثل  $(a, b, c, d)$  فإن  $b, c$  يكونان وسطين حسابيين وتسمى جميع الحدود التي تقع بين أي حدين غير متتاليين بالأوساط الحسابية.







## مثال ٢

أوجد العددين الذين وسطهما الحسابي  $\frac{1}{4}$  والنسبة بينهما ٣ : ٢

### الحل

$$\begin{aligned} \text{نفرض أن العددين } x \text{ و } y \text{ حيث } x : y = 3 : 2 \\ \therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \quad \therefore x = \frac{3}{2}y \\ \therefore \text{العددين هما } 3 \times 3 = 9 \text{ و } 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

### ملاحظة

عند إدخال عدة أوساط حسابية بين  $x$  و  $y$  تكون المتتابعة حسابية هي  
 $(x, \dots, y)$  ويكون الوسط الأول  $= \frac{x+y}{2}$  والوسط الأخير  $= \frac{x+y}{2}$  وهكذا...  
 الوسط الثاني  $= \frac{x+y}{2}$  والوسط الأخير  $= \frac{x+y}{2}$  وهكذا..

## مثال ٣

إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٢ و ٢٤ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأول والرابع إلى مجموع الوسطين الأخيرين هما ٣ : ١ فما عدد هذه الأوساط ؟

### الحل

نفرض أن أساس المتتابعة =  $x$

$\therefore$  الوسطين الأول والرابع هما  $x$  و  $x+3x$  والوسطين الأخيرين هما  $x+24x$  و  $x+25x$

$$\frac{1}{3} = \frac{x + x + 3x + x}{x + 24x + x + 25x}$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{6x}{50x} \quad \therefore 50x = 18x \quad \therefore x = 18$$

$$\therefore x(1-1) + 2 = 24 \quad \therefore 2 = 24$$

$$\therefore 2 = 24 \quad \therefore 2 = 24$$

$$\therefore \text{عدد الأوساط} = 10$$

ملاحظة  $x = 1$  و  $y = 24$

$$\frac{2-24}{1+2} = 2 \quad \therefore 10 = 2$$

$$\frac{1-1}{1+2} = 1$$

$$11 = 1 + 2$$

$$\therefore \text{عدد الأوساط} = 10$$



## مثال

إذا كان  $b$  وسطًا حسابيًا للعددين  $a$  و  $c$  فأثبت أن:  $\frac{a^2 - 12}{b - a} + \frac{15 - ac}{1 - b} = 1$

## الحل

$\therefore b$  وسطًا حسابيًا للعددين  $a$  و  $c$   $\therefore \frac{a + c}{2} = b$

$$\frac{a^2 - 12}{b - a} + \frac{15 - ac}{1 - b} = \frac{a^2 - 12}{\frac{a + c}{2} - a} + \frac{15 - ac}{1 - \frac{a + c}{2}} \therefore$$

$$= \frac{(1 - a) \times 2}{1 - a} = \frac{12 - a^2}{\frac{1 - a}{2}} = \frac{a^2 - 12}{\frac{1 - a}{2}} + \frac{15 - ac}{\frac{1 - a}{2}} =$$



# تمرين ٣

في الحساب الحسابية

أولاً  
أجب عن الأسئلة الآتية،  
عندما يكون لك  
طعن على جواب  
الزميلة

راجع معنا واختر نفسك

اختبار تراكمي

الدرجة النهائية



أجب عن الأسئلة الآتية،

- ① الحد السابع للمتتابعة الحسابية (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠، ...) هو .....  
[ ١٧ د ١٨ د ١٩ د ٢٠ ]
- ② إذا كان  $u_n = u_{n-1} + 3$  فإن أساس المتتابعة الحسابية ( $u_n$ ) = .....  
[ ٣- د ٢ د ٢- د ٢ ]
- ③  $\sum_{k=1}^n (2k+1) = \dots\dots\dots$   
[ ٢٥ د ٣٠ د ٣٥ د ٤٠ ]
- ④ الحد الخامس للمتتابعة ( $u_n$ ) حيث  $u_n = 2n - 9$  هو .....  
[ ١١ د ٩ د ١٣ د ١٥ ]

⑤ أوجد رتبة وقيمة أول حد سالب في المتتابعة الحسابية (٦٧، ٦٤، ٦١، ٥٨، ...)

.....

.....

.....

⑥ ( $u_n$ ) متتابعة حسابية فيها  $u_1 = 9$ ،  $u_2 = 22$  أوجد المتتابعة  
ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته تساوي ٦٦

.....

.....

.....







(v) اگر  $a$  و  $b$  وسطین حسابی بین  $x$  و  $y$  ہیں، تو  $\frac{a-b}{a+b}$  کا تعاقب

[ १ ८ ६ ८ २ ८ २ ]

### مسائل المستوى الثاني

ادخل ٥ اوساط حسابية بين ٤ و ٨

١٦١ | خمسة أوساط حسابية بين ٢٢٤ ثم أوجد الوسط الرابع

١٢٠٠ وسطاً حسب بيانين ٢٥٠٠ ثم أوجد كل من الوسط الأول والوسط الأخير (١٢٠٠)

٢٤- وسطاً حسابياً بين العددين ٤٧-٢٤

عددان النسبة بينهما ٣ : ١٠ ووسطها الحسابي = ١٣ أوجد العددين. (٢٠٠٦)

١٦٥٠ عددان، فوجد أحدهما عن ضعف الآخر بمقدار ٣ ووسطهما الحسابي  $= \frac{1}{4}(1650, 90)$

٢٣ كان الوسط الخامس بين العددين ١٧٤٣ من متقاربة حسابية هو ٢٣

عبد الأوسامك ثم قبيلة الوسط التاسع.

٢٥٠٠ متتابة حسابية حدها التاسع يساوي ٢٥ والوسط الحسابي بين حديها الثالث

والخامس هو، **أوجد هذه المتباينة.**

١٧ (د) مكاتبت ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢ ب حدود متعاقبة من متتابعة حسابية

فأوجد قيمة  $k$  من

إذا كان الوسط الحسابي بين ١، ب هو ٨ والوسط الحسابي بين ٤، ٢٤ ب هو ٢٠

فاوجد قبعة كل من م ع م

١٤١ إذا أدخلت أوساط حسابية من ١٧٤ وكان الوسط الحسابي يساوي ثلاثة أمثال

الوسيط الثاني أوجد عدد هذه الأوساط.

١٥ **أوجد** المتتالية الحسابية التي فيها الوسط الحسابي بين حديها الثالث والسابع هو

١٩ وحدها العاشر يزيد عن ضعف حدها الرابع بمقدار ٢



١٦. متتابعة حسابية مجموع حديها الأول والرابع = ١٦ والوسط الحسابي لحديها الثاني والرابع = ٩ أوجد المتتابعة ثم أوجد الوسط الخامس  
(١٠٠، ١٠٠، ١٠٠، ١٠٠، ١٠٠)

١٧. إذا أدخلت عدة أوساط حسابية بين ٣ و ٢٥ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الأخيرين هي ٣ : ١٩ فما عدد تلك الأوساط ؟  
(١٠)

١٨. إذا كان  $a, b$  وسطين حسابيين بين  $s, t$  فإن  $s - t = 3(t - s)$   
(١٠)

١٩. إذا أدخلنا بين ٢ و ٢٨ عدة أوساط حسابية عددها  $n$  وكانت النسبة بين الوسط الثالث والوسط الذي ترتيبه  $(n-1)$  هي ١ : ٣ فما قيمة  $n$  ؟  
(١٠)

٢٠. إذا كانت  $s$  هي الوسط الحسابي بين  $s, t, x$  فأثبت أن :

$$(1) (s + 2t + x)(x + 2s - t) = (x - s - t)(x + 2s - t)$$

$$(2) \frac{s + 2t + x}{x - s - t} + \frac{s + 2t - x}{x - s - t} = 1$$

### مسائل تقبس مستويان عليا في التفكم

٢١. اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١. إذا كانت  $(s, t, x)$  هي تتابع حسابي فإن  $s^2 = \dots$

$$[s^2 + t^2, s^2 + x^2, s^2 + t^2 + x^2, (s + t + x)^2]$$

٢. عند إدخال عدة أوساط حسابية بين  $a, b$  يكون الوسط قبل الأخير = .....

$$[a - b, a + b, a, a - b]$$

٣. إذا كانت  $(x, y)$  متتابعة حسابية حيث  $x = 3, y = 2$  فإن الوسط الحسابي

$$[x, y, x + y, x - y]$$

٤. إذا كان الوسط الحسابي لعددين ٣ و ٥ يساوي ٩ فإن  $s = \dots$

$$[8, 4, 2, -2]$$

٥. إذا كان  $(s, t, x)$  هي تتابع حسابي فإن  $x = \dots$

$$[28, 32, 30, 36]$$

٦. إذا كان  $(a, b)$  الوسط الحسابي لعددين  $(1 + 2)$  و  $(3 + 4)$  فإن  $a = \dots$

$$[5, 3, 2, 1]$$



٧) متتابعة حسابية حدها الأول = ١٢ وحدها الأخير = ٢٩

فإن قيمة الحد الأوسط = ..... [ ١٤ - ١٤ - ١٤ - ١٤ ]

٨) إذا كان ( ١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ ) في تتابع حسابي فإن = .....

[ ٢٤٩ - ٢٤٩ - ٢٤٩ - ٢٤٩ - ٢٤٩ ]

٩) إذا كانت ( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ) في تتابع حسابي،  $٢ = ٢$ ،  $٣ = ٣$ ،  $٤ = ٤$ ،  $٥ = ٥$

فإن  $٢ + ٣ = ٥$  ..... [ ١ - ١ - ١ - ١ - ١ ]

١٠) إذا كان الوسط الحسابي للعدين ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠

هو ٢٩ حيث  $٢ < ٣$  فإن  $٢ : ٣ = ٤ : ٥ = ٦ : ٧ = ٨ : ٩ = ١٠ : ١١$  ..... [ ١ : ١ - ١ - ١ - ١ ]

١١) إذا كان  $٢$  وسط حسابي بين  $١$  ،  $٣$  فإن  $٢ = ٢$ ،  $٣ = ٣$ ،  $٤ = ٤$ ،  $٥ = ٥$

[ ١ - ١ - ١ - ١ - ١ ]

١٢) إذا كانت  $٢$  وسط حسابي بين  $١$  ،  $٣$  فإن  $٢ = ٢$ ،  $٣ = ٣$ ،  $٤ = ٤$ ،  $٥ = ٥$

[ ١ - ١ - ١ - ١ - ١ ]

١٣) إذا كان  $٢$  ،  $٣$  ،  $٤$  ،  $٥$  ،  $٦$  ،  $٧$  ،  $٨$  ،  $٩$  ،  $١٠$  ،  $١١$  في تتابع حسابي أيضًا

فإن  $٢ + ٣ = ٥$  ..... [ ١ - ١ - ١ - ١ - ١ ]

١٤) إذا كانت  $٢$  ،  $٣$  ،  $٤$  ،  $٥$  ،  $٦$  ،  $٧$  ،  $٨$  ،  $٩$  ،  $١٠$  ،  $١١$  متتابعة حسابية فإن  $٢ = ٢$ ،  $٣ = ٣$ ،  $٤ = ٤$ ،  $٥ = ٥$

[ ١ - ١ - ١ - ١ - ١ ]

١٥) الوسط الحسابي للحددين الثالث عشر والخامس والعشرين من متتابعة حسابية

يساوي ٢٨١٥  $٢٨١٥ = ٢٨١٥ + ٢٨١٥ + ٢٨١٥ + ٢٨١٥ + ٢٨١٥$  ..... [ ١ - ١ - ١ - ١ - ١ ]

[ ٢٧٥ - ٢٧٥ - ٢٧٥ - ٢٧٥ - ٢٧٥ ]

١٦) إذا كانت  $٢$  ،  $٣$  ،  $٤$  ،  $٥$  ،  $٦$  ،  $٧$  ،  $٨$  ،  $٩$  ،  $١٠$  ،  $١١$  متتابعة حسابية فإن رتبة أول حد قيمته

نقل من ( ٥٠ - ) هو ..... [ ١ - ١ - ١ - ١ - ١ ]

١٧) أوجد قياس كل زاوية المثلث الذي فيه قياس (حدي زواياه هو الوسط الحسابي بين قياسي

الزاويتين الآخرين والفرق بين قياسي الزاويتين الكبري والصغرى يساوي ٨٠° [ ١٠٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠ ]

١٨) أدخل ٦ أوساط حسابية بين ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠



٢٧) إذا أدخل بين العددين  $f$  و  $g$  ثلاثة أوساط حسابية مجموعها ٤٢١ وإذا أدخل بين نفس العددين خمسة أوساط حسابية أخرى وكان أول الأوساط الثلاثة الأولى يزيد عن أول الأوساط الخمسة الأخرى بمقدار ٢ أوجد العددين  $f$  و  $g$  [٣٣٤]

٢٨) أوجد النسبة بين أطوال أضلاع  $\triangle ABC$  القائمة الزاوية في  $B$  والذي أطوال أضلاعه هي تتابع حسابي حيث  $A$  هو الوسط الحسابي بين  $B$  و  $C$  [١٤٢]

٢٩) إذا كان  $s$ ،  $r$ ،  $g$  في تتابع حسابي فأثبت أن:  $s + r$ ،  $r + g$ ،  $g + s$  هي تتابع حسابي أيضاً.





## المتسلسلات الحسابية

الحل الأول

٤

### المشكلة الحسابية

هي عملية جمع حدود المتتالية الحسابية.

فمثلاً المتتالية الحسابية (٢، ٤، ٦، ٨، ١٠) يمكن جمع حدودها الخمسة وتكتب في صورة متسلسلة حسابية بالشكل  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 =$  حيث  $2$  هو  $u_1$  ويرمز لمجموع خمسة حدود متتالية من المتتالية.

مع ملاحظة أن المتتالية عندما تكات مكتوبة في صورة دالة مثل  $(u_n) = (2n)$  فإن مجموع المتسلسلة المتكونة من الخمسة حدود الأولى يكتب على الصورة  $\sum_{i=1}^5 (2i)$

### ② مجموع $n$ حداً من متتالية حسابية

**أولاً:-** مجموع  $n$  حداً من متتالية حسابية معلومة حديها الأول  $u_1$  والأخير  $u_n$

إذا كان الحد الأول من المتتالية الحسابية هو  $u_1$  وحدها الأخير هو  $u_n$  وأساسها  $d$  وعدد حدودها  $n$  فإن مجموع هذه الحدود (مجموع  $n$  حداً) من المتتالية الحسابية يرمز له





بالرمز  $n$ ، ويعطى بالمتسلسلة التالية،

$$(1) \Rightarrow 1 + (1 + 1) + \dots + (1 + 1) + (1 + 1) + 1 = n$$

كما يمكن كتابة المتسلسلة بالصفة،

$$(2) \Rightarrow 1 + (1 + 1) + \dots + (1 + 1) + (1 + 1) + 1 = n$$

ولجمع المعادلتين (1)، (2) ونصلح أن،

$$2n = 1 + (1 + 1) + \dots + (1 + 1) + (1 + 1) + 1$$

$$\text{أي أن } 2n = n(n + 1) \text{ ويقسم الطرفين على } 2 \Rightarrow \frac{n(n + 1)}{2} = n$$

حيث  $n$  هو عدد الحدود،  $1$  هو الحد الذي يبدأ به،  $n$  هو الحد الأخير وتستخدم هذه القاعدة لإد علم في المتتابعة حدها الأول والأخير

### مثال ١

أوجد مجموع العشرين حذا الأولى من متتابعة حسابية حدها الأول  $4$  وحدها العشرين  $61$

### الحل

$$4 = 1 \quad 61 = n \quad 2n = 122 \quad \therefore \frac{n(n + 1)}{2} = 122$$

### مثال ٢

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية  $6 + 9 + 12 + \dots + 33$

### الحل

$3 = 9 - 6$ ، يلزم إيجاد عدد الحدود باستخدام الحد الموني للمتتابعة

$$3 = (n - 1) + 6$$

$$3 = n - 1 + 6$$

$$3 = n - 1 + 6$$

$$n = 10$$

$$30 = n \times 3$$

ثم نوجد مجموع  $10$  حدود باستخدام الحد الأول والأخير

$$195 = [33 + 6] \times \frac{10}{2}$$

$$\frac{n(n + 1)}{2} = n$$



مجموع  $n$  حذا من متبعة حسابية بمعلومية حدها الأول  $l$  والأساس  $r$



علما فيما سبق أن  $l = 1 + (n-1)r$  وعلما أن  $S_n = \frac{n}{2} (l + 1)$

وبالتعويض بالعلاقة الأولى في العلاقة الثانية فإن:

$$S_n = \frac{n}{2} [1 + (n-1)r] \quad : \text{هـ} \quad S_n = \frac{n}{2} [1 + (n-1)r]$$

وتستخدم هذه القاعدة إذا علم في المتتابعة حدها الأول والأساس.

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

مجموع حدود متتابعة حسابية حدها الأول $l$ وعدد حدودها $n$ ،	$S_n = \frac{n}{2} (l + 1)$
ويستخدم إذا علم الحد الأخير $(l)$	
ويستخدم إذا علم الأساس $(r)$	$S_n = \frac{n}{2} [1 + (n-1)r]$

## مثال ٢

أوجد مجموع العشرين حذاً الأولى من المتتابعة الحسابية:  $(٢٩, ١٩, ٩, -١)$

## الحل

$$r = 19 - 29 = -10$$

$$: \text{هـ} \quad S_n = \frac{n}{2} [1 + (n-1)r]$$

$$: \text{هـ} \quad S_{20} = \frac{20}{2} [1 + (20-1)(-10)] = -190$$

## ملاحظات هامة

- ١ لإيجاد المجموع  $S_n$  يلزم معرفة عدد الحدود  $n$  وإذا كانت غير معلومة توجد من القاعدة  $l = 1 + (n-1)r$
- ٢ لإيجاد المجموع ابتداء من حد معين توجد قيمة هذا الحد وتعوض عنه بدلاً من  $1$  في القاعدة التي نستخدمها **فمثلاً** ، إذا كان مطلوب المجموع بدءاً من الحد الثالث فإننا عوض به  $9$  بدلاً من  $1$







$$\textcircled{2} \text{ ع } n = (1 - u) + 1 = 5 \quad \therefore \text{ع } 1 = 3 \times 1 + 5 = 8 \quad \text{ع } 2 = 3 \times 2 + 5 = 11$$

لايجاد مجموع 10 حدود ابتداء من الحد السابع نضع ع<sub>7</sub> بدلاً من 1 في قانون المجموع هـ،

$$\text{ع } 7 = 3 \times 7 + 5 = 26 \quad \therefore \text{ع } 10 = 73 \times 5 = [27 + 73 \times 2] \times 5 = 790$$

مجموع حدود المتتالية ابتداء من ع<sub>7</sub> الى ع<sub>16</sub>

$$\textcircled{3} \text{ ع } n = (1 - u) + 1 = 5 \quad \therefore \text{ع } 7 = 3 \times 7 + 5 = 26 \quad \text{ع } 16 = 3 \times 16 + 5 = 53$$

$$\text{ع } 16 = 3 \times 16 + 5 = 53$$

لايجاد مجموع حدود المتتالية بدءاً من ع<sub>7</sub> الى ع<sub>16</sub> نضع ع<sub>7</sub> بدلاً من 1 في القانون

ونضع ع<sub>16</sub> بدلاً من 1

$$\therefore \text{هـ} = \frac{u}{4} (n + 1)$$

$$\therefore \text{هـ} = \frac{11}{4} (26 + 53) = \frac{11}{4} (79) = 217$$

#### ملاحظة

يمكن إيجاد مجموع حدود المتتالية بدءاً من ع<sub>7</sub> الى ع<sub>16</sub> من طريق إيجاد هـ،  
ونطرح منها هـ، فيكون الناتج هو مجموع الحدود من ع<sub>7</sub> الى ع<sub>16</sub>

#### مثال

أوجد المتتالية الحسابية التي فيها ع<sub>1</sub> = 11 ، ع<sub>2</sub> = 17 ، هـ = 980

#### الحل

لاحظ أن ع<sub>1</sub> هو 1 ، ع<sub>2</sub> هو 17 ، هـ = 980

أو أوجد قيمة n

$$\therefore \frac{u}{4} (17 + 11) = 980$$

$$\text{هـ} = \frac{u}{4} (n + 1)$$

فيكون n = 20 حلاً

$$980 = \frac{u}{4} \times 21$$



### ثامناً ، يوجد قيمة و .

$$59 + 9 = 68 \therefore$$

$$u(1-u) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} u^2$$

$\mathbb{E} = \mathbb{E}_0$

$$V_3 = 11 - AV = \$14.$$

تكوين المتتابعة  $u_n = 1 + 11 = 12$  و  $u_{n+1} = 1 + 12 = 13$

المتابعة الحسابية هي (١١، ١٥، ١٩، ٢٣، ٢٧، ٣١، ٣٥، ٣٩، ٤٣، ٤٧، ٥١، ٥٥، ٥٩، ٦٣، ٦٧، ٧١، ٧٥، ٧٩، ٨٣، ٨٧، ٩١، ٩٥، ٩٩، ١٠٣، ١٠٧، ١١١، ١١٥، ١١٩، ١٢٣، ١٢٧، ١٣١، ١٣٥، ١٣٩، ١٤٣، ١٤٧، ١٥١، ١٥٥، ١٥٩، ١٦٣، ١٦٧، ١٧١، ١٧٥، ١٧٩، ١٨٣، ١٨٧، ١٩١، ١٩٥، ١٩٩، ٢٠٣، ٢٠٧، ٢١١، ٢١٥، ٢١٩، ٢٢٣، ٢٢٧، ٢٣١، ٢٣٥، ٢٣٩، ٢٤٣، ٢٤٧، ٢٥١، ٢٥٥، ٢٥٩، ٢٦٣، ٢٦٧، ٢٧١، ٢٧٥، ٢٧٩، ٢٨٣، ٢٨٧، ٢٩١، ٢٩٥، ٢٩٩، ٣٠٣، ٣٠٧، ٣١١، ٣١٥، ٣١٩، ٣٢٣، ٣٢٧، ٣٣١، ٣٣٥، ٣٣٩، ٣٤٣، ٣٤٧، ٣٥١، ٣٥٥، ٣٥٩، ٣٦٣، ٣٦٧، ٣٧١، ٣٧٥، ٣٧٩، ٣٨٣، ٣٨٧، ٣٩١، ٣٩٥، ٣٩٩، ٤٠٣، ٤٠٧، ٤١١، ٤١٥، ٤١٩، ٤٢٣، ٤٢٧، ٤٣١، ٤٣٥، ٤٣٩، ٤٤٣، ٤٤٧، ٤٥١، ٤٥٥، ٤٥٩، ٤٦٣، ٤٦٧، ٤٧١، ٤٧٥، ٤٧٩، ٤٨٣، ٤٨٧، ٤٩١، ٤٩٥، ٤٩٩، ٥٠٣، ٥٠٧، ٥١١، ٥١٥، ٥١٩، ٥٢٣، ٥٢٧، ٥٣١، ٥٣٥، ٥٣٩، ٥٤٣، ٥٤٧، ٥٥١، ٥٥٥، ٥٥٩، ٥٦٣، ٥٦٧، ٥٧١، ٥٧٥، ٥٧٩، ٥٨٣، ٥٨٧، ٥٩١، ٥٩٥، ٥٩٩، ٦٠٣، ٦٠٧، ٦١١، ٦١٥، ٦١٩، ٦٢٣، ٦٢٧، ٦٣١، ٦٣٥، ٦٣٩، ٦٤٣، ٦٤٧، ٦٥١، ٦٥٥، ٦٥٩، ٦٦٣، ٦٦٧، ٦٧١، ٦٧٥، ٦٧٩، ٦٨٣، ٦٨٧، ٦٩١، ٦٩٥، ٦٩٩، ٧٠٣، ٧٠٧، ٧١١، ٧١٥، ٧١٩، ٧٢٣، ٧٢٧، ٧٣١، ٧٣٥، ٧٣٩، ٧٤٣، ٧٤٧، ٧٥١، ٧٥٥، ٧٥٩، ٧٦٣، ٧٦٧، ٧٧١، ٧٧٥، ٧٧٩، ٧٨٣، ٧٨٧، ٧٩١، ٧٩٥، ٧٩٩، ٨٠٣، ٨٠٧، ٨١١، ٨١٥، ٨١٩، ٨٢٣، ٨٢٧، ٨٣١، ٨٣٥، ٨٣٩، ٨٤٣، ٨٤٧، ٨٥١، ٨٥٥، ٨٥٩، ٨٦٣، ٨٦٧، ٨٧١، ٨٧٥، ٨٧٩، ٨٨٣، ٨٨٧، ٨٩١، ٨٩٥، ٨٩٩، ٩٠٣، ٩٠٧، ٩١١، ٩١٥، ٩١٩، ٩٢٣، ٩٢٧، ٩٣١، ٩٣٥، ٩٣٩، ٩٤٣، ٩٤٧، ٩٥١، ٩٥٥، ٩٥٩، ٩٦٣، ٩٦٧، ٩٧١، ٩٧٥، ٩٧٩، ٩٨٣، ٩٨٧، ٩٩١، ٩٩٥، ٩٩٩، ١٠٠٣، ١٠٠٧، ١٠٠١١، ١٠٠١٥، ١٠٠١٩، ١٠٠٢٣، ١٠٠٢٧، ١٠٠٣١، ١٠٠٣٥، ١٠٠٣٩، ١٠٠٤٣، ١٠٠٤٧، ١٠٠٥١، ١٠٠٥٥، ١٠٠٥٩، ١٠٠٦٣، ١٠٠٦٧، ١٠٠٧١، ١٠٠٧٥، ١٠٠٧٩، ١٠٠٨٣، ١٠٠٨٧، ١٠٠٩١، ١٠٠٩٥، ١٠٠٩٩، ١٠١٠٣، ١٠١٠٧، ١٠١١١، ١٠١١٥، ١٠١١٩، ١٠١٢٣، ١٠١٢٧، ١٠١٣١، ١٠١٣٥، ١٠١٣٩، ١٠١٤٣، ١٠١٤٧، ١٠١٥١، ١٠١٥٥، ١٠١٥٩، ١٠١٦٣، ١٠١٦٧، ١٠١٧١، ١٠١٧٥، ١٠١٧٩، ١٠١٨٣، ١٠١٨٧، ١٠١٩١، ١٠١٩٥، ١٠١٩٩، ١٠٢٠٣، ١٠٢٠٧، ١٠٢١١، ١٠٢١٥، ١٠٢١٩، ١٠٢٢٣، ١٠٢٢٧، ١٠٢٣١، ١٠٢٣٥، ١٠٢٣٩، ١٠٢٤٣، ١٠٢٤٧، ١٠٢٥١، ١٠٢٥٥، ١٠٢٥٩، ١٠٢٦٣، ١٠٢٦٧، ١٠٢٧١، ١٠٢٧٥، ١٠٢٧٩، ١٠٢٨٣، ١٠٢٨٧، ١٠٢٩١، ١٠٢٩٥، ١٠٢٩٩، ١٠٣٠٣، ١٠٣٠٧، ١٠٣١١، ١٠٣١٥، ١٠٣١٩، ١٠٣٢٣، ١٠٣٢٧، ١٠٣٣١، ١٠٣٣٥، ١٠٣٣٩، ١٠٣٤٣، ١٠٣٤٧، ١٠٣٥١، ١٠٣٥٥، ١٠٣٥٩، ١٠٣٦٣، ١٠٣٦٧، ١٠٣٧١، ١٠٣٧٥، ١٠٣٧٩، ١٠٣٨٣، ١٠٣٨٧، ١٠٣٩١، ١٠٣٩٥، ١٠٣٩٩، ١٠٤٠٣، ١٠٤٠٧، ١٠٤١١، ١٠٤١٥، ١٠٤١٩، ١٠٤٢٣، ١٠٤٢٧، ١٠٤٣١، ١٠٤٣٥، ١٠٤٣٩، ١٠٤٤٣، ١٠٤٤٧، ١٠٤٥١، ١٠٤٥٥، ١٠٤٥٩، ١٠٤٦٣، ١٠٤٦٧، ١٠٤٧١، ١٠٤٧٥، ١٠٤٧٩، ١٠٤٨٣، ١٠٤٨٧، ١٠٤٩١، ١٠٤٩٥، ١٠٤٩٩، ١٠٥٠٣، ١٠٥٠٧، ١٠٥١١، ١٠٥١٥، ١٠٥١٩، ١٠٥٢٣، ١٠٥٢٧، ١٠٥٣١، ١٠٥٣٥، ١٠٥٣٩، ١٠٥٤٣، ١٠٥٤٧، ١٠٥٥١، ١٠٥٥٥، ١٠٥٥٩، ١٠٥٦٣، ١٠٥٦٧، ١٠٥٧١، ١٠٥٧٥، ١٠٥٧٩، ١٠٥٨٣، ١٠٥٨٧، ١٠٥٩١، ١٠٥٩٥، ١٠٥٩٩، ١٠٦٠٣، ١٠٦٠٧، ١٠٦١١، ١٠٦١٥، ١٠٦١٩، ١٠٦٢٣، ١٠٦٢٧، ١٠٦٣١، ١٠٦٣٥، ١٠٦٣٩، ١٠٦٤٣، ١٠٦٤٧، ١٠٦٥١، ١٠٦٥٥، ١٠٦٥٩، ١٠٦٦٣، ١٠٦٦٧، ١٠٦٧١، ١٠٦٧٥، ١٠٦٧٩، ١٠٦٨٣، ١٠٦٨٧، ١٠٦٩١، ١٠٦٩٥، ١٠٦٩٩، ١٠٧٠٣، ١٠٧٠٧، ١٠٧١١، ١٠٧١٥، ١٠

مثال

$$(1 - \sqrt{2}) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

### الحل

عدد حدود المتتابعة = قيمة  $u$  الأخيرة - قيمة  $u$  الأولى + 1 =  $1 - 9 + 9 = 1$  حلاً  
ونوجد الحد الأول  $u_1$  ونعوض بها عن  $u$  واحد الأخير  $u_n$  ونعوض بها عن  $n$  في  $u_n$

$$EV = 1 - 0.1 \times 7 = .3 \quad \text{and} \quad q = 1 - 0 \times 7 = .2$$

$$(J+1) \frac{v}{r} = \mu \omega$$

$$D^2 = (14 + 9) \frac{Y_1}{Y} = 23 \frac{Y_1}{Y} \therefore$$

### مثال

أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من المتتالية الحسابية :

(٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٤، ١٥، ١٦، ١٧، ١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠، ٣١، ٣٢، ٣٣، ٣٤، ٣٥، ٣٦، ٣٧، ٣٨، ٣٩، ٤٠، ٤١، ٤٢، ٤٣، ٤٤، ٤٥، ٤٦، ٤٧، ٤٨، ٤٩، ٥٠، ٥١، ٥٢، ٥٣، ٥٤، ٥٥، ٥٦، ٥٧، ٥٨، ٥٩، ٦٠، ٦١، ٦٢، ٦٣، ٦٤، ٦٥، ٦٦، ٦٧، ٦٨، ٦٩، ٧٠، ٧١، ٧٢، ٧٣، ٧٤، ٧٥، ٧٦، ٧٧، ٧٨، ٧٩، ٨٠، ٨١، ٨٢، ٨٣، ٨٤، ٨٥، ٨٦، ٨٧، ٨٨، ٨٩، ٩٠، ٩١، ٩٢، ٩٣، ٩٤، ٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩، ١٠٠، ١٠١، ١٠٢، ١٠٣، ١٠٤، ١٠٥، ١٠٦، ١٠٧، ١٠٨، ١٠٩، ١١٠، ١١١، ١١٢، ١١٣، ١١٤، ١١٥، ١١٦، ١١٧، ١١٨، ١١٩، ١٢٠، ١٢١، ١٢٢، ١٢٣، ١٢٤، ١٢٥، ١٢٦، ١٢٧، ١٢٨، ١٢٩، ١٣٠، ١٣١، ١٣٢، ١٣٣، ١٣٤، ١٣٥، ١٣٦، ١٣٧، ١٣٨، ١٣٩، ١٤٠، ١٤١، ١٤٢، ١٤٣، ١٤٤، ١٤٥، ١٤٦، ١٤٧، ١٤٨، ١٤٩، ١٥٠، ١٥١، ١٥٢، ١٥٣، ١٥٤، ١٥٥، ١٥٦، ١٥٧، ١٥٨، ١٥٩، ١٦٠، ١٦١، ١٦٢، ١٦٣، ١٦٤، ١٦٥، ١٦٦، ١٦٧، ١٦٨، ١٦٩، ١٧٠، ١٧١، ١٧٢، ١٧٣، ١٧٤، ١٧٥، ١٧٦، ١٧٧، ١٧٨، ١٧٩، ١٨٠، ١٨١، ١٨٢، ١٨٣، ١٨٤، ١٨٥، ١٨٦، ١٨٧، ١٨٨، ١٨٩، ١٩٠، ١٩١، ١٩٢، ١٩٣، ١٩٤، ١٩٥، ١٩٦، ١٩٧، ١٩٨، ١٩٩، ٢٠٠، ٢٠١، ٢٠٢، ٢٠٣، ٢٠٤، ٢٠٥، ٢٠٦، ٢٠٧، ٢٠٨، ٢٠٩، ٢١٠، ٢١١، ٢١٢، ٢١٣، ٢١٤، ٢١٥، ٢١٦، ٢١٧، ٢١٨، ٢١٩، ٢٢٠، ٢٢١، ٢٢٢، ٢٢٣، ٢٢٤، ٢٢٥، ٢٢٦، ٢٢٧، ٢٢٨، ٢٢٩، ٢٣٠، ٢٣١، ٢٣٢، ٢٣٣، ٢٣٤، ٢٣٥، ٢٣٦، ٢٣٧، ٢٣٨، ٢٣٩، ٢٤٠، ٢٤١، ٢٤٢، ٢٤٣، ٢٤٤، ٢٤٥، ٢٤٦، ٢٤٧، ٢٤٨، ٢٤٩، ٢٥٠، ٢٥١، ٢٥٢، ٢٥٣، ٢٥٤، ٢٥٥، ٢٥٦، ٢٥٧، ٢٥٨، ٢٥٩، ٢٦٠، ٢٦١، ٢٦٢، ٢٦٣، ٢٦٤، ٢٦٥، ٢٦٦، ٢٦٧، ٢٦٨، ٢٦٩، ٢٧٠، ٢٧١، ٢٧٢، ٢٧٣، ٢٧٤، ٢٧٥، ٢٧٦، ٢٧٧، ٢٧٨، ٢٧٩، ٢٨٠، ٢٨١، ٢٨٢، ٢٨٣، ٢٨٤، ٢٨٥، ٢٨٦، ٢٨٧، ٢٨٨، ٢٨٩، ٢٩٠، ٢٩١، ٢٩٢، ٢٩٣، ٢٩٤، ٢٩٥، ٢٩٦، ٢٩٧، ٢٩٨، ٢٩٩، ٣٠٠، ٣٠١، ٣٠٢، ٣٠٣، ٣٠٤، ٣٠٥، ٣٠٦، ٣٠٧، ٣٠٨، ٣٠٩، ٣١٠، ٣١١، ٣١٢، ٣١٣، ٣١٤، ٣١٥، ٣١٦، ٣١٧، ٣١٨، ٣١٩، ٣٢٠، ٣٢١، ٣٢٢، ٣٢٣، ٣٢٤، ٣٢٥، ٣٢٦، ٣٢٧، ٣٢٨، ٣٢٩، ٣٣٠، ٣٣١، ٣٣٢، ٣٣٣، ٣٣٤، ٣٣٥، ٣٣٦، ٣٣٧، ٣٣٨، ٣٣٩، ٣٤٠، ٣٤١، ٣٤٢، ٣٤٣، ٣٤٤، ٣٤٥، ٣٤٦، ٣٤٧، ٣٤٨، ٣٤٩، ٣٥٠، ٣٥١، ٣٥٢، ٣٥٣، ٣٥٤، ٣٥٥، ٣٥٦، ٣٥٧، ٣٥٨، ٣٥٩، ٣٦٠، ٣٦١، ٣٦٢، ٣٦٣، ٣٦٤، ٣٦٥، ٣٦٦، ٣٦٧، ٣٦٨، ٣٦٩، ٣٧٠، ٣٧١، ٣٧٢، ٣٧٣، ٣٧٤، ٣٧٥، ٣٧٦، ٣٧٧، ٣٧٨، ٣٧٩، ٣٨٠، ٣٨١، ٣٨٢، ٣٨٣، ٣٨٤، ٣٨٥، ٣٨٦، ٣٨٧، ٣٨٨، ٣٨٩، ٣٩٠، ٣٩١، ٣٩٢، ٣٩٣، ٣٩٤، ٣٩٥، ٣٩٦، ٣٩٧، ٣٩٨، ٣٩٩، ٤٠٠، ٤٠١، ٤٠٢، ٤٠٣، ٤٠٤، ٤٠٥، ٤٠٦، ٤٠٧، ٤٠٨، ٤٠٩، ٤١٠، ٤١١، ٤١٢، ٤١٣، ٤١٤، ٤١٥، ٤١٦، ٤١٧، ٤١٨، ٤١٩، ٤٢٠، ٤٢١، ٤٢٢، ٤٢٣، ٤٢٤، ٤٢٥، ٤٢٦، ٤٢٧، ٤٢٨، ٤٢٩، ٤٣٠، ٤٣١، ٤٣٢، ٤٣٣، ٤٣٤، ٤٣٥، ٤٣٦، ٤٣٧، ٤٣٨، ٤٣٩، ٤٤٠، ٤٤١، ٤٤٢، ٤٤٣، ٤٤٤، ٤٤٥، ٤٤٦، ٤٤٧، ٤٤٨، ٤٤٩، ٤٥٠، ٤٥١، ٤٥٢، ٤٥٣، ٤٥٤، ٤٥٥، ٤٥٦، ٤٥٧، ٤٥٨، ٤٥٩، ٤٦٠، ٤٦١، ٤٦٢، ٤٦٣، ٤٦٤، ٤٦٥، ٤٦٦، ٤٦٧، ٤٦٨، ٤٦٩، ٤٧٠، ٤٧١، ٤٧٢، ٤٧٣، ٤٧٤، ٤٧٥، ٤٧٦، ٤٧٧، ٤٧٨، ٤٧٩، ٤٨٠، ٤٨١، ٤٨٢، ٤٨٣، ٤٨٤، ٤٨٥، ٤٨٦، ٤٨٧، ٤٨٨، ٤٨٩، ٤٩٠، ٤٩١، ٤٩٢، ٤٩٣، ٤٩٤، ٤٩٥، ٤٩٦، ٤٩٧، ٤٩٨، ٤٩٩، ٥٠٠، ٥٠١، ٥٠٢، ٥٠٣، ٥٠٤، ٥٠٥، ٥٠٦، ٥٠٧، ٥٠٨، ٥٠٩، ٥١٠، ٥١١، ٥١٢، ٥١٣، ٥١٤، ٥١٥، ٥١٦، ٥١٧، ٥١٨، ٥١٩، ٥٢٠، ٥٢١، ٥٢٢، ٥٢٣، ٥٢٤، ٥٢٥، ٥٢٦، ٥٢٧، ٥٢٨، ٥٢٩، ٥٣٠، ٥٣١، ٥٣٢، ٥٣٣، ٥٣٤، ٥٣٥، ٥٣٦، ٥٣٧، ٥٣٨، ٥٣٩، ٥٤٠

## الجل

$$\Psi = \Psi - \eta = 5$$

$$[s(1-u) + 1v] \frac{u}{v} = u - A \quad (1)$$

$$(٢ \times \text{بالضرب}) [٢ - ٢٢ + ٦] \frac{٥}{٢} = [٢ \times (١ - ٥) + ٢ \times ٢] \frac{٥}{٢} = ١٦٥ \therefore$$

$$= 22. - 0.4 + 1.04 = 22.64$$

$$[v + uv]u = uv.$$

$$x = (x_1 - u)(x_1 + u) \therefore$$

• 11-04-2021

۱۰ = ۵ ۱۱ = ۱۰ ۱۲ = ۱۱ ۱۳ = ۱۲ ۱۴ = ۱۳ ۱۵ = ۱۴ ۱۶ = ۱۵ ۱۷ = ۱۶ ۱۸ = ۱۷ ۱۹ = ۱۸ ۲۰ = ۱۹ ۲۱ = ۲۰ ۲۲ = ۲۱ ۲۳ = ۲۲ ۲۴ = ۲۳ ۲۵ = ۲۴ ۲۶ = ۲۵ ۲۷ = ۲۶ ۲۸ = ۲۷ ۲۹ = ۲۸ ۳۰ = ۲۹ ۳۱ = ۳۰ ۳۲ = ۳۱ ۳۳ = ۳۲ ۳۴ = ۳۳ ۳۵ = ۳۴ ۳۶ = ۳۵ ۳۷ = ۳۶ ۳۸ = ۳۷ ۳۹ = ۳۸ ۴۰ = ۳۹ ۴۱ = ۴۰ ۴۲ = ۴۱ ۴۳ = ۴۲ ۴۴ = ۴۳ ۴۵ = ۴۴ ۴۶ = ۴۵ ۴۷ = ۴۶ ۴۸ = ۴۷ ۴۹ = ۴۸ ۵۰ = ۴۹ ۵۱ = ۵۰ ۵۲ = ۵۱ ۵۳ = ۵۲ ۵۴ = ۵۳ ۵۵ = ۵۴ ۵۶ = ۵۵ ۵۷ = ۵۶ ۵۸ = ۵۷ ۵۹ = ۵۸ ۶۰ = ۵۹ ۶۱ = ۶۰ ۶۲ = ۶۱ ۶۳ = ۶۲ ۶۴ = ۶۳ ۶۵ = ۶۴ ۶۶ = ۶۵ ۶۷ = ۶۶ ۶۸ = ۶۷ ۶۹ = ۶۸ ۷۰ = ۶۹ ۷۱ = ۷۰ ۷۲ = ۷۱ ۷۳ = ۷۲ ۷۴ = ۷۳ ۷۵ = ۷۴ ۷۶ = ۷۵ ۷۷ = ۷۶ ۷۸ = ۷۷ ۷۹ = ۷۸ ۸۰ = ۷۹ ۸۱ = ۸۰ ۸۲ = ۸۱ ۸۳ = ۸۲ ۸۴ = ۸۳ ۸۵ = ۸۴ ۸۶ = ۸۵ ۸۷ = ۸۶ ۸۸ = ۸۷ ۸۹ = ۸۸ ۹۰ = ۸۹ ۹۱ = ۹۰ ۹۲ = ۹۱ ۹۳ = ۹۲ ۹۴ = ۹۳ ۹۵ = ۹۴ ۹۶ = ۹۵ ۹۷ = ۹۶ ۹۸ = ۹۷ ۹۹ = ۹۸ ۱۰۰ = ۹۹ ۱۰۱ = ۱۰۰ ۱۰۲ = ۱۰۱ ۱۰۳ = ۱۰۲ ۱۰۴ = ۱۰۳ ۱۰۵ = ۱۰۴ ۱۰۶ = ۱۰۵ ۱۰۷ = ۱۰۶ ۱۰۸ = ۱۰۷ ۱۰۹ = ۱۰۸ ۱۱۰ = ۱۰۹ ۱۱۱ = ۱۱۰ ۱۱۲ = ۱۱۱ ۱۱۳ = ۱۱۲ ۱۱۴ = ۱۱۳ ۱۱۵ = ۱۱۴ ۱۱۶ = ۱۱۵ ۱۱۷ = ۱۱۶ ۱۱۸ = ۱۱۷ ۱۱۹ = ۱۱۸ ۱۲۰ = ۱۱۹ ۱۲۱ = ۱۲۰ ۱۲۲ = ۱۲۱ ۱۲۳ = ۱۲۲ ۱۲۴ = ۱۲۳ ۱۲۵ = ۱۲۴ ۱۲۶ = ۱۲۵ ۱۲۷ = ۱۲۶ ۱۲۸ = ۱۲۷ ۱۲۹ = ۱۲۸ ۱۳۰ = ۱۲۹ ۱۳۱ = ۱۳۰ ۱۳۲ = ۱۳۱ ۱۳۳ = ۱۳۲ ۱۳۴ = ۱۳۳ ۱۳۵ = ۱۳۴ ۱۳۶ = ۱۳۵ ۱۳۷ = ۱۳۶ ۱۳۸ = ۱۳۷ ۱۳۹ = ۱۳۸ ۱۴۰ = ۱۳۹ ۱۴۱ = ۱۴۰ ۱۴۲ = ۱۴۱ ۱۴۳ = ۱۴۲ ۱۴۴ = ۱۴۳ ۱۴۵ = ۱۴۴ ۱۴۶ = ۱۴۵ ۱۴۷ = ۱۴۶ ۱۴۸ = ۱۴۷ ۱۴۹ = ۱۴۸ ۱۵۰ = ۱۴۹ ۱۵۱ = ۱۵۰ ۱۵۲ = ۱۵۱ ۱۵۳ = ۱۵۲ ۱۵۴ = ۱۵۳ ۱۵۵ = ۱۵۴ ۱۵۶ = ۱۵۵ ۱۵۷ = ۱۵۶ ۱۵۸ = ۱۵۷ ۱۵۹ = ۱۵۸ ۱۶۰ = ۱۵۹ ۱۶۱ = ۱۶۰ ۱۶۲ = ۱۶۱ ۱۶۳ = ۱۶۲ ۱۶۴ = ۱۶۳ ۱۶۵ = ۱۶۴ ۱۶۶ = ۱۶۵ ۱۶۷ = ۱۶۶ ۱۶۸ = ۱۶۷ ۱۶۹ = ۱۶۸ ۱۷۰ = ۱۶۹ ۱۷۱ = ۱۷۰ ۱۷۲ = ۱۷۱ ۱۷۳ = ۱۷۲ ۱۷۴ = ۱۷۳ ۱۷۵ = ۱۷۴ ۱۷۶ = ۱۷۵ ۱۷۷ = ۱۷۶ ۱۷۸ = ۱۷۷ ۱۷۹ = ۱۷۸ ۱۸۰ = ۱۷۹ ۱۸۱ = ۱۸۰ ۱۸۲ = ۱۸۱ ۱۸۳ = ۱۸۲ ۱۸۴ = ۱۸۳ ۱۸۵ = ۱۸۴ ۱۸۶ = ۱۸۵ ۱۸۷ = ۱۸۶ ۱۸۸ = ۱۸۷ ۱۸۹ = ۱۸۸ ۱۹۰ = ۱۸۹ ۱۹۱ = ۱۹۰ ۱۹۲ = ۱۹۱ ۱۹۳ = ۱۹۲ ۱۹۴ = ۱۹۳ ۱۹۵ = ۱۹۴ ۱۹۶ = ۱۹۵ ۱۹۷ = ۱۹۶ ۱۹۸ = ۱۹۷ ۱۹۹ = ۱۹۸ ۲۰۰ = ۱۹۹ ۲۰۱ = ۲۰۰ ۲۰۲ = ۲۰۱ ۲۰۳ = ۲۰۲ ۲۰۴ = ۲۰۳ ۲۰۵ = ۲۰۴ ۲۰۶ = ۲۰۵ ۲۰۷ = ۲۰۶ ۲۰۸ = ۲۰۷ ۲۰۹ = ۲۰۸ ۲۱۰ = ۲۰۹ ۲۱۱ = ۲۱۰ ۲۱۲ = ۲۱۱ ۲۱۳ = ۲۱۲ ۲۱۴ = ۲۱۳ ۲۱۵ = ۲۱۴ ۲۱۶ = ۲۱۵ ۲۱۷ = ۲۱۶ ۲۱۸ = ۲۱۷ ۲۱۹ = ۲۱۸ ۲۲۰ = ۲۱۹ ۲۲۱ = ۲۲۰ ۲۲۲ = ۲۲۱ ۲۲۳ = ۲۲۲ ۲۲۴ = ۲۲۳ ۲۲۵ = ۲۲۴ ۲۲۶ = ۲۲۵ ۲۲۷ = ۲۲۶ ۲۲۸ = ۲۲۷ ۲۲۹ = ۲۲۸ ۲۳۰ = ۲۲۹ ۲۳۱ = ۲۳۰ ۲۳۲ = ۲۳۱ ۲۳۳ = ۲۳۲ ۲۳۴ = ۲۳۳ ۲۳۵ = ۲۳۴ ۲۳۶ = ۲۳۵ ۲۳۷ = ۲۳۶ ۲۳۸ = ۲۳۷ ۲۳۹ = ۲۳۸ ۲۴۰ = ۲۳۹ ۲۴۱ = ۲۴۰ ۲۴۲ = ۲۴۱ ۲۴۳ = ۲۴۲ ۲۴۴ = ۲۴۳ ۲۴۵ = ۲۴۴ ۲۴۶ = ۲۴۵ ۲۴۷ = ۲۴۶ ۲۴۸ = ۲۴۷ ۲۴۹ = ۲۴۸ ۲۵۰ = ۲۴۹ ۲۵۱ = ۲۵۰ ۲۵۲ = ۲۵۱ ۲۵۳ = ۲۵۲ ۲۵۴ = ۲۵۳ ۲۵۵ = ۲۵۴ ۲۵۶ = ۲۵۵ ۲۵۷ = ۲۵۶ ۲۵۸ = ۲۵۷ ۲۵۹ = ۲۵۸ ۲۶۰ = ۲۵۹ ۲۶۱ = ۲۶۰ ۲۶۲ = ۲۶۱ ۲۶۳ = ۲۶۲ ۲۶۴ = ۲۶۳ ۲۶۵ = ۲۶۴ ۲۶۶ = ۲۶۵ ۲۶۷ = ۲۶۶ ۲۶۸ = ۲۶۷ ۲۶۹ = ۲۶۸ ۲۷۰ = ۲۶۹ ۲۷۱ = ۲۷۰ ۲۷۲ = ۲۷۱ ۲۷۳ = ۲۷۲ ۲۷۴ = ۲۷۳ ۲۷۵ = ۲۷۴ ۲۷۶ = ۲۷۵ ۲۷۷ = ۲۷۶ ۲۷۸ = ۲۷۷ ۲۷۹ = ۲۷۸ ۲۸۰ = ۲۷۹ ۲۸۱ = ۲۸۰ ۲۸۲ = ۲۸۱ ۲۸۳ = ۲۸۲ ۲۸۴ = ۲۸۳ ۲۸۵ = ۲۸۴ ۲۸۶ = ۲۸۵ ۲۸۷ = ۲۸۶ ۲۸۸ = ۲۸۷ ۲۸۹ = ۲۸۸ ۲۹۰ = ۲۸۹ ۲۹۱ = ۲۹۰ ۲۹۲ = ۲۹۱ ۲۹۳ = ۲۹۲ ۲۹۴ = ۲۹۳ ۲۹۵ = ۲۹۴ ۲۹۶ = ۲۹۵ ۲۹۷ = ۲۹۶ ۲۹۸ = ۲۹۷ ۲۹۹ = ۲۹۸ ۳۰۰ = ۲۹۹ ۳۰۱ = ۳۰۰ ۳۰۲ = ۳۰۱ ۳۰۳ = ۳۰۲ ۳۰۴ = ۳۰۳ ۳۰۵ = ۳۰۴ ۳۰۶ = ۳۰۵ ۳

١٠ حدود الحدود التي يجب أخذها لتكون المجموع ٢٥ هي ١٠ حدود



## مثال ٨

أوجد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها من المتتابة الحسابية (٧١، ٦٨، ٦٥، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سالباً ثم أوجد أكبر مجموع لهذه المتتابة

## الحل

لإيجاد أصغر عدد من الحدود ليكون المجموع سالباً نفرض أن  $n > 0$ .

$$3 - = 71 - 68 = 3 \quad \therefore \text{هـ} \quad \frac{U}{4} = [3(1 - U) + 12]$$

$$\therefore \frac{U}{4} [3 - x(1 - U) + 71 \times 2] > 0 \quad \therefore \frac{U}{4} \text{ موجبة دائماً}$$

$$3 + U^3 - 142 > 0 \quad \therefore U^3 > 139$$

$$48 \frac{1}{4} < U \quad \therefore U = 49$$

$\therefore$  أصغر عدد من الحدود يمكن أخذها ليكون مجموع المتتابة سالباً هو ٤٩، هذا أكبر مجموع لهذه المتتابة هو مجموع الحدود الموجبة ولإيجاد مجموع الحدود الموجبة يلزم معرفة آخر حد موجب في هذه المتتابة.

$$\therefore \text{نفرض أن } n < 0 \quad \therefore 3(1 - U) + 12 < 0$$

$$3 - x(1 - U) + 71 < 0 \quad \therefore 3 + U^3 - 71 < 0$$

$$U^3 < 68 \quad \therefore U < 41 \quad \therefore \frac{74}{3} > U \quad \therefore \frac{74}{3} > U \quad \therefore 24 = U$$

$\therefore$  عدد الحدود الموجبة = ٢٤ هذا

$$\text{هـ} \quad \frac{24}{4} = [3 - x \cdot 23 + 71 \times 2] = 879$$

## مثال ٩

أوجد المتتابة الحسابية التي مجموع السبعة حدود الأولى منها يساوي ٧٧ ومجموع السبعة حدود التالية لها يساوي ٢٢٤

## الحل

$$\therefore \text{هـ} \quad \frac{U}{4} = [3(1 - U) + 12] \quad \therefore [3 + 12] \frac{U}{4} = 77$$

$$\therefore 3 + 1 = 11 \quad \text{①}$$

$$\therefore [3 + 8 \cdot 2] \frac{U}{4} = 224 \quad \therefore \text{الحدود السبعة التالية تبدأ من } 8$$



$$[53 + 57 + 1]7 = 774 \therefore$$

ب طرح ① من ② :

$\therefore$  المتتابة هي (٢ ٨ ٤٥ ٢) ....

$$[56 + (57 + 1)2] \frac{7}{7} = 774 \therefore$$

$$② \Rightarrow 32 = 56 + 1 \therefore$$

$$2 = 1 \therefore 5 = 5 \therefore$$

حل آخر :

يمكن اعتبار مجموع السبعة حدود الأولى ٧٧ ومجموع الأربعة عشر حدًا الأولى ٣٠١ لكن يكون الحد الأول واحدًا في الحالتين ويوجد  $\frac{1}{7}$  هي  $\frac{1}{14}$  ونحن المعادلتين بنفس الطريقة السابقة.

### مثال ١٠

إذا كان مجموع  $n$  حدًا من حدود متتابة حسابية يعطى بالقانون  $u = (1 + n)$  فأوجد المتتابة وحدها الثاني عشر.

### الحل

$$\text{عندما } n = 1 \therefore u = (1 + 1) = 2 \therefore \frac{1}{2} = 2$$

$$\text{عندما } n = 2 \therefore u = (1 + 2) = 3 \therefore \frac{1}{3} = 3 \therefore \frac{1}{2} = 2 \therefore \frac{1}{3} = 3 \therefore \frac{1}{2} = 2 \therefore \frac{1}{3} = 3$$

$$\text{عندما } n = 3 \therefore u = (1 + 3) = 4 \therefore \frac{1}{4} = 4 \therefore \frac{1}{2} = 2 \therefore \frac{1}{3} = 3 \therefore \frac{1}{4} = 4 \therefore \frac{1}{2} = 2 \therefore \frac{1}{3} = 3 \therefore \frac{1}{4} = 4$$

$$\therefore \text{ المتتابة هي } (2 \ 8 \ 4 \ 5 \ 2) \dots$$

### مثال ١١

متتابة حسابية فيها حدها الرابع بنقص عن العدد ٤٢ بمقدار حدها الثاني وحاصل ضرب حديها الثالث والخامس يساوي ٣٩٥ أوجد

١ المتتابة ثم أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى.

٢ عدد الحدود اللازم أخذها من هذه المتتابة ابتداءً من حدها الأول ليكون المجموع مساويًا للصفر.

### الحل

$$① \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 42 \therefore \frac{1}{2} = 42 \therefore \frac{1}{2} = 42 \therefore \frac{1}{2} = 42$$

$$42 = 53 + 1 + 5 + 1 \therefore$$

$$② \Rightarrow 21 = 52 + 1 \therefore$$



$$② \rightarrow 315 = (51 + 1)(52 + 1) \therefore$$

$$315 = 3 \times 105$$

بالتعويض من ① في ②:

$$315 = (52 + 21)(21) \therefore$$

$$21 = 52 + 1$$

$$105 = 52 + 21 \therefore$$

$$21 = 1 \therefore$$

$$21 = 5$$

$\therefore$  المتتابعة  $\{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97, 101, 105, \dots\}$

$$315 = [(3-1) \times 19 + 27 \times 2] \frac{27}{2} = 315$$

$$1 = [3 - x(1 - 0) + 27 \times 2] \frac{0}{2} \therefore$$

② نفرض أن  $x$  هو - صغر

$$19 = 0 \therefore$$

$$03 = 57 \therefore$$

$$1 = 3 + 03 = 54 \therefore$$

## مثال ١٢

متتالية حسابية مكونة من ١٥ حد ، وحدها الأوسط = ١٨ ، والنسبة بين مجموع الحدود السابقة لهذا الحد إلى مجموع الحدود التالية له هي ٥ : ١٣ أوجد هذه المتتابعة.

## الحل

$$15 = 0$$

١٣	الحد الأوسط	٥
١٣	١٨	٥

$\therefore$  الحد الأوسط هو ١٨

$$18 = \frac{15 + 1}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$① \rightarrow 18 = 57 + 1 \therefore$$

$$\frac{5}{13} = \frac{\text{مجموع الحدود السابقة لـ } 8}{\text{مجموع الحدود التالية لـ } 8}$$

$$\frac{5}{13} = \frac{[5(1-0) + 12] \frac{0}{2}}{[5(1-0) + 8 \times 2] \frac{0}{2}} \therefore$$

$$\frac{5}{13} = \frac{53 + 1}{53 + 16 + 1} \therefore$$

$$539 + 13 = 550 + 15 \therefore$$

$$② \rightarrow 57 = 1 \therefore$$

يحل المعادلتين ① و ②:

$$37 = 2 \times 18 + 1 = 36 + 1 = 37$$

$$\frac{5}{13} = \frac{56 + 12}{56 + [58 + 1]2} \therefore$$

$$\frac{5}{13} = \frac{53 + 1}{53 + 16 + 1} \therefore$$

$$18 = 57 \therefore$$

$$1 = 122 = 1 \therefore$$

$\therefore$  المتتابعة هي  $\{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, 85, 89, 93, 97, 101, 105, \dots\}$

لاحظ أن  
الحدود التالية للحد  
القامن تبدأ بـ ٩



### مثال (١٣)

بدأ موظف حياته العملية براتب سنوي قدره ٣٠٠٠ جنيهاً وأخذ يتقاضى علاوة ثابتة قدرها ١٠٠ جنيهاً، بعد ١٥ سنة أصبح راتبه ٤٤٠٠ جنيهاً سنوياً ثم أوجد مجموع المبالغ التي تقاضاها خلال تلك الفترة.

### الحل

$$١٠٠ = ٥ \quad ٣٠٠٠ = ١$$

∴  $ج = (٣٠٠٠، ٣١٠٠، ٣٢٠٠، \dots)$  وهي متتابعة حسابية

$$١٠٠ \times (١ - ٥) + ١ = ج$$

$$١٠٠ - ٥٠٠ = ٣٠٠٠ - ٤٤٠٠ \Rightarrow ١٠٠ \times (١ - ٥) + ٣٠٠٠ = ٤٤٠٠$$

$$\frac{١٥٠٠}{١٠٠} = ٥ \quad \therefore$$

$$١٥٠٠ = ٥ \times ١٠٠$$

$$١٥ = ٥$$

∴ بعد ١٥ سنة يصبح راتبه ٤٤٠٠ جنيهاً

$$٥ = \frac{٥}{١} \quad [١٢ \times (١ - ٥) + ١٢]$$

$$٥٥٥٠٠ = [١٠٠ \times ١٤ + ٣٠٠٠ \times ٢] \times \frac{١٥}{١}$$

∴ مجموع المبالغ التي يتقاضاها خلال تلك الفترة = ٥٥٥٠٠ جنيهاً



# تمرين

التمرين الأول: الحسابات الحسابية

ملاحظة: لكل سؤال  
نقطة واحدة  
مجموع النقاط  
الاحتمالية

أولاً: راجع معاً واختر نفسك

اختبار تراكمي

الدرجة النهائية



١. اجب عن الأسئلة الآتية:

١) إذا كان الوسط الحسابي للعديدين ١٦٤ هو ٣ فإن  $..... =$

[١٠ - د ٢ د ١٦ د ٦]

٢) إذا كان  $..... = ١٥ - ٣$  فإن أول حد سالب في المتتابعة هو  $.....$

[١٠ د ٢ د ١٦ د ٦]

٣) إذا كانت  $.....$  ب حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن القيمة العددية

للمقدار  $(١ + ب)$  يساوي  $.....$  [١٠ د ٢ د ١٦ د ٦]

٤) الحد الخامس في متتابعة الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على ٥

هو  $.....$  [١٠ د ٢ د ١٦ د ٦]

٥) إذا كان ٢ من  $٦٤٢ +$  من  $٧٤٢ -$  من ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية فأوجد قيمة  $.....$

.....

.....

٦) إذا كان مجموع الحدين الثاني والرابع من متتابعة حسابية يساوي ٢ وكان مجموع الحدود السادس والسابع والثامن يساوي  $١٥ -$  فأوجد المتتابعة

.....

.....



مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ مجموع  $n$  حداً الأولى من متتابة حسابية حدها الأول  $1$  وحدها الأخير  $100$  هو .....

[  $\frac{n}{2}(n+1)$  أ  $\frac{n}{2}(n-1)$  ب  $\frac{n}{2}(n+2)$  ج  $\frac{n}{2}(n-2)$  د ]

٢ مجموع  $n$  حداً الأولى من متتابة حسابية حدها الأول  $1$  وأساسه  $2$  هو .....

[  $\frac{n}{2}(n+1)$  أ  $\frac{n}{2}(n-1)$  ب  $\frac{n}{2}(n+2)$  ج  $\frac{n}{2}(n-2)$  د ]

[  $\frac{n}{2}(n+1)$  أ  $\frac{n}{2}(n-1)$  ب  $\frac{n}{2}(n+2)$  ج  $\frac{n}{2}(n-2)$  د ]

٣ مجموع أول  $10$  أعداد زوجية في مجموعة الأعداد الطبيعية يساوي .....

[  $10$  أ  $90$  ب  $110$  ج  $120$  د ]

٤ مجموع الأعداد الصحيحة المتتالية التي تبدأ بالعدد  $1$  وتنتهي بالعدد  $20$  يساوي .....

[  $210$  أ  $200$  ب  $210$  ج  $220$  د ]

٥ مجموع التسعة حدود الأولى من متتابة حسابية حدها الأول  $2$  وحدها الأخير  $18$  هو .....

[  $90$  أ  $70$  ب  $80$  ج  $60$  د ]

[  $50$  أ  $30$  ب  $40$  ج  $20$  د ]  $\sum_{k=1}^n (1+2k) = \dots\dots\dots$

٦ مجموع الأعداد الطبيعية الفردية التي هي أكبر من  $10$  وأقل من  $30$  تساوي .....

[  $20$  أ  $10$  ب  $30$  ج  $40$  د ]

٧ مجموع الأعداد الطبيعية التي تقبل القسمة على  $3$  ومحصورة بين  $30$  و  $50$  تساوي .....

[  $243$  أ  $81$  ب  $27$  ج  $729$  د ]

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ قيمة المتسلسلة الحسابية  $\sum_{k=1}^n (1+2k)$  يساوي .....

[  $20$  أ  $30$  ب  $40$  ج  $50$  د ]

٢ قيمة المتسلسلة  $1+2+3+\dots+100$  باستخدام رمز التجميع هي .....

[  $\frac{n}{2}(n+1)$  أ  $\frac{n}{2}(n-1)$  ب  $\frac{n}{2}(n+2)$  ج  $\frac{n}{2}(n-2)$  د ]



٣) قيمة المتسلسلة  $7 + 12 + 17 + 22$  باستخدام رمز التجميع هي .....

$$\left[ \frac{1}{12} (2 + \sqrt{5}) \right] \quad \left[ \frac{1}{12} (3 + \sqrt{4}) \right] \quad \left[ \frac{1}{12} (1 + \sqrt{7}) \right] \quad \left[ \frac{1}{12} (4 + \sqrt{2}) \right]$$

٤) تكتب المتسلسلة الحسابية  $3 + 7 + 11 + \dots + 35$  باستخدام رمز المجموع كالآتي:

$$\left[ \frac{1}{12} (1 - \sqrt{4}) \right] \quad \left[ \frac{1}{12} (1 - \sqrt{2}) \right] \quad \left[ \frac{1}{12} (1 - \sqrt{3}) \right] \quad \left[ \frac{1}{12} (1 - \sqrt{2}) \right]$$

٥) مجموع حدود المتتابعة الحسابية  $(-12 - 4 - 8 - 12 - 16 - 20 - 24)$  يعطى عدداً .....

[صحيحاً موجباً] [صحيحاً سالباً] [صفر] [غير حقيقي]

٦) مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية  $(24 - 1000 - 819 - 24)$  يساوي .....

[صفر] [24] [16] [48]

١) أوجد مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة الحسابية  $(3 - 45 - 87 - \dots)$  [١٧٠]

٢) أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية  $(2 - 85 - 8000 - 816)$  [١١٧]

٣) أوجد مجموع المتسلسلة  $9 + 12 + 15 + 18 + \dots + 92$  [١٧٧٦]

٤) أوجد مجموع ثلاثون حداً الأولى من المتتابعة  $2 = 3 + 5$  [١١٠]

٦) (ع) متتابعة حسابية فيها  $16 = 16$ ،  $26 = 26$  أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حداً الأولى منها

[٥٠٤ ( ١٢٥١٢٨٠ )]

٧) (ع) متتابعة حسابية فيها  $12 = 12$ ،  $21 = 21$  أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع العشرين حداً الأولى منها

[٤٩١ ( ١٠١٥١٣ )]

٨) أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من المتتابعة الحسابية  $(1 - 3 - 5 - \dots)$  ابتداء من

حدها الأول ليكون مجموع هذه الحدود مساوياً ٤١٠ [٢٠ حداً]

## ثالثاً مسائل المستوى الثاني

٩) في المتتابعة الحسابية  $(9 - 12 - 15 - \dots)$  أوجد:

١) مجموع ١٥ حداً الأولى منها.

٢) مجموع حدود المتتابعة ابتداء من الحد الخامس إلى الحد الخامس عشر

٣) عدد الحدود التي مجموعها يساوي ٧٥٠ ابتداء من الحد الأول. [٢٠٣٦٩١ (٥٠) حداً]



٩٠ (ب) أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧، ٢٤، ٢١، ...) ابتداءً من الحد الأول ليتلاشي المجموع.

다시 보자

١١ **قوله** أوحد أصغر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٨٩، ٨٦، ٧٣، ٤٠٠٠) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع سائناً

**पुनर्विचार**

أوجد أكبر عدد من الحدود يمكن أخذه من المتتابعة (٢٥، ٢٩، ٣٣، ٣٧، ٤١، ٤٥) ابتداءً من الحد الأول ليكون المجموع موجباً.

$$u_{\alpha} = u|_{\alpha}$$

١٩) مجموع جميع الحدود الموجبة من المتتابعة الحسابية (٣٥، ٢٣، ٢٢، ٢١، ٢٠، ١٩، ١٨، ١٧، ١٦، ١٥، ١٤، ١٣، ١٢، ١١، ١٠، ٩، ٨، ٧، ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١، ٠، -١، -٢، -٣، -٤، -٥، -٦، -٧، -٨، -٩، -١٠، -١١، -١٢، -١٣، -١٤، -١٥، -١٦، -١٧، -١٨، -١٩، -٢٠، -٢١، -٢٢، -٢٣، -٢٤، -٢٥، -٢٦، -٢٧، -٢٨، -٢٩، -٣٠، -٣١، -٣٢، -٣٣، -٣٤، -٣٥) {...} [٣١]

173] (1999)

12) **أوجد**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$  من المتتالية الحسابية (٢٥، ٢٦، ١٧، ....) ثم أوجد  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k$  من حدود هذه المتتالية ابتداء من  $n=1$  ليكون المجموع -١٩٥  
(١٤٦ - ١٣١ = ١٥)

12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334353637383940414243444546474849505152535455565758596061626364656667686970717273747576777879808182838485868788899091929394959697989910010110210310410510610710810911011111211311411511611711811912012112212312412512612712812913013113213313413513613713813914014114214314414514614714814915015115215315415515615715815916016116216316416516616716816917017117217317417517617717817918018118218318418518618718818919019119219319419519619719819920020120220320420520620720820921021121221321421521621721821922022122222322422522622722822923023123223323423523623723823924024124224324424524624724824925025125225325425525625725825926026126226326426526626726826927027127227327427527627727827928028128228328428528628728828929029129229329429529629729829930030130230330430530630730830931031131231331431531631731831932032132232332432532632732832933033133233333433533633733833934034134234334434534634734834935035135235335435535635735835936036136236336436536636736836937037137237337437537637737837938038138238338438538638738838939039139239339439539639739839940040140240340440540640740840941041141241341441541641741841942042142242342442542642742842943043143243343443543643743843944044144244344444544644744844945045145245345445545645745845946046146246346446546646746846947047147247347447547647747847948048148248348448548648748848949049149249349449549649749849950050150250350450550650750850951051151251351451551651751851952052152252352452552652752852953053153253353453553653753853954054154254354454554654754854955055155255355455555655755855956056156256356456556656756856957057157257357457557657757857958058158258358458558658758858959059159259359459559659759859960060160260360460560660760860961061161261361461561661761861962062162262362462562662762862963063163263363463563663763863964064164264364464564664764864965065165265365465565665765865966066166266366466566666766866967067167267367467567667767867968068168268368468568668768868969069169269369469569669769869970070170270370470570670770870971071171271371471571671771871972072172272372472572672772872973073173273373473573673773873974074174274374474574674774874975075175275375475575675775875976076176276376476576676776876977077177277377477577677777877978078178278378478578678778878979079179279379479579679779879980080180280380480580680780880981081181281381481581681781881982082182282382482582682782882983083183283383483583683783883984084184284384484584684784884985085185285385485585685785885986086186286386486586686786886987087187287387487587687787887988088188288388488588688788888989089189289389489589689789889990090190290390490590690790890991091191291391491591691791891992092192292392492592692792892993093193293393493593693793893994094194294394494594694794894995095195295395495595695795895996096196296396496596696796896997097197297397497597697797897998098198298398498598698798898999099199299399499599699799899910001001100210031004100510061007100810091010101110121013101410151016101710181019102010211022102310241025102610271028102910301031103210331034103510361037103810391040104110421043104410451046104710481049105010511052105310541055105610571058105910601061106210631064106510661067106810691070107110721073107410751076107710781079108010811082108310841085108610871088108910901091109210931094109510961097109810991100110111021103110411051106110711081109111011111112111311141115111611171118111911201121112211231124112511261127112811291130113111321133113411351136113711381139114011411142114311441145114611471148114911501151115211531154115511561157115811591160116111621163116411651166116711681169117011711172117311741175117611771178117911801181118211831184118511861187118811891190119111921193119411951196119711981199120012011202120312041205120612071208120912101211121212131214121512161217121812191220122112221223122412251226122712281229123012311232123312341235123612371238123912401241124212431244124512461247124812491250125112521253125412551256125712581259126012611262126312641265126612671268126912701271127212731274127512761277127812791280128112821283128412851286128712881289129012911292129312941295129612971298129913001

في المتابعة (٣٢٤٧٨٤٧٨٠٠) .. أوجد :

- ① رتبة وقيمة أول حدث سالت فيها .

- ② عدد الحدود التي تجعل المجموع أكبر من الصفر.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}$$

في المتابعة الحسابية (٢٥، ٢٣، ٢١، ....) أوجد:

- ١) اصغر مجموع طمتمائة.

- ٢) عدد الحدود التي مجموعها = ١٢٠ ابتداءً من الحد الأول، فسر وجود جوابين،

$\beta \cdot \beta^* = \omega(\gamma) = \omega(\beta)$

١٢) (ع.ج) متتابعة حسابية حدها التالي = ١٣ ومجموع العشرة حدود الأولى منها ٢٢٥  
أوجد المتتابعة

**[— I m e t h e f o r ]**

متابعة حسابية مجموع  $n$  حذا الأولى منها = ٩٦٠٠ وحدها الأول = ١٠٠ وأساسها = ٤  
أوجد عدد حدودها.

[44]

متابعة حسابية حدها الأول يساوي ١٢ وحدها الأخير يساوي ٢٦ ومجموع حدودها يساوي ١٠٠ أوجد المتتابعة.

$$[(\mathbb{R}^n - \{0\}) \times \mathbb{R}^n] \cup \{0\}$$

٢٠ أوجد المتتابعة الحسابية التي فيها :

- $$010 = \text{A}7 = \text{B}6 \quad \text{A}9 = \text{C}6 \quad \text{B}8 = \text{C}6 \quad \textcircled{1}$$

- $$2 \times 10 = 20 \text{ cm} \quad 2 \times 14 = 28 \text{ cm} \quad \textcircled{2}$$

[(1971-1974, 1975, 1976)]

【附註】本報已於 1994 年 10 月 1 日遷往新址。



متابعة حسانية حدها الثاني يساوي ١٢ وحدها قبل الأخير يساوي ٤٨ ومجموع  
حدها يساوي ١٥٠ أوجد عدد حدودها.

(ج<sub>٤</sub>) متتابعة حسابية فيها ج<sub>٣</sub> - ج<sub>٤</sub> = ٤ ومجموع الحدود الأربعة الأولى عنها يساوي صفراً أوجد المتتابعة ثم أوجد عدد الحدود التي يجب أخذها من هذه المتتابعة مدّةً من حده الأول ليكون مجموعها ٣٢٠

مجموع العشرتين حداً الأولى من متابعة حسابية يساوي ٨٦٠ ومجموع حديها الثالث والرابع يزيد من حديها السادس بمقداره أوجد المتتابعة.

متتابعة حسابية **مناقشة** مجموع حديها الرابع والخامس = ١٣ وحاصل ضربهما = ٤٠  
أوجد المتتابعة ومجموع الـ **عشر** حذا الأولى منها.  
[٦ = ١١(١٦) - ١١(٤)]

٢٥ مجموع الحدين الثالث والخامس من متتالية حسابية تزايدية يساوي ٢٤ ومربع حدها السادس يساوي ٣٢٤ أوجد المتتالية ثم أوجد مجموع العشرين حذاً الأولى منها. [١٩٦٢ (١) - ١٩٦٠]

(ج.ن) متابعة حسابية فيها ج. = ٩٩، ج. = ٩٩، أوجد المتتابعة ثم أوجد حكم حدًا يلزم أخذها من حدود هذه المتتابعة ابتداء من حدها الأول يكون مجموعها أكبر ما يمكن وأوجد هذا المجموع.

متابعة حسابية أساسها مجموع الخمسة حدود الأولى منها يساوي صفر أوجد المتابعة  
ثم أوجد رتبة أولى حد تزيد قيمته عن ١٢٢ في هذه المتابعة.

٢٨ في المتابعة الحسابية (١٨، ١٩، ٢٠، ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠) أو جد العدد الذي تبدأ به ليكون مجموع عشرة حدود منها متساويًا (-٧٥)

[٤.]

٢٦ متتابعة حسابية تتكون من ٢١ حدًا مجموع السبعة حدود الأولى منها يساوي ٩١ ومجموع السبعة حدود الأخيرة منها يساوي ٣٨٥ أوجد المتتابعة [١٤٤٠٠٠٤٦٧٤٨]

٣٠) إذا كان مجموع  $u$  حذاً من متتابعة حسابية يتعين بالقانون  $u = (u - v) \cdot 2$  فأوجد : ١

٢) عند الحسود اللزيم أخذها من المتتابعة ابتداء من العدد الأول حتى يكون المجموع مساوياً ٢٤١٠



إذا كان  $\mathbf{u}$  هو مجموع  $\mathbf{u}$  حد، الأول من المتتابعة الحسابية (ع)

متابعة حسابية حدها الأول يزيد عن ضعف حدها الخامس بمقدار ٢ والوسط الحسابي لحديها الثالث والسادس يساوي ١٦ أوجد حدها الأول وأساسها ثم أوجد حكم حدًا يمكن أخذها من المتتابعة ابتداء من حدها الأول ليتلشى المجموع (٣٠ - ١١١١)

**متابعة حسابية مجموع الحدود الثاني والرابع والخامس منها يساوي ١٨ ومجموع الثلاثة عشر حدًا الأولى منها يساوي ١٣، أوجد أول حد سالب في هذه المتتابعة ثم أوجد أول حد من حدود هذه المتتابعة يجعل مجموعها ابتداء من الحد الأول سالبًا. (٢٠١٤)**

أسست إحدى الشركات عمل صيانة شاملة لأحد مبانيها وحسبت موعداً لاستلام المبنى وكان من بين شروط التعاقد أنه في حالة التأخير عن الموعد أن يدفع المسئول ١٠٠ جنيه غرامة عن اليوم الأول وتزداد ١٠٠ جنيه عن كل يوم قال له (إذا تأخر المقاول عن تسليم هذه الأعمال خمسة أيام **فكم** يكون إجمالي المبلغ المستحق لتسديد غرامة التأخير؟) (١٠٠)



## مسائل تقبس مستهيات عليا في التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :

- ① مجموع حدود المتتابعة الحسابية (٢٩، ٤، ٤٠٠٠، ٣٤٠٠٠، ٩٥٤) يساوي .....  
 [ ٢٠١٦، ٢١٠٨، ٢٠٧٩، ٩٢٠٢ ]
- ② إذا كان مجموع  $n$  حداً من حدود المتتابعة (٣ - ٢ - ١) يساوي -٣٦٠،  
 فإن  $n =$  .....  
 [ ٤٠، ٩، ١٨، ٢٠ ]
- ③ متتابعة مجموع  $n$  حداً الأولى منها يعطى بالعلاقة  $u_n = 2 - u_{n-1}$   
 فإن حدها الخامس = .....  
 [ ١٥، ٣٥، ١٠، ٧ ]
- ④ إذا كان مجموع  $n$  حداً من متتابعة حسابية يتعين من القانون  $u = (n + 1)$   
 فإن حدها لعام  $n =$  .....  
 [ ١ - ١، ١ - ٢، ١ - ٣، ١ - ٤ ]
- ⑤ متتابعة حسابية حدودها موجبة فيها  $u_p = (p)^3$ ، وإذا أضيف الواحد صحيح  
 إلى كل حد من حدود هذه المتتابعة أصبح الحد الثالث في المتتابعة الجديدة  
 $u_p = (p)^3$  فإن حدها الأول = .....  
 [ ٢، ٣، ٤، ٥ ]
- ⑥ متتابعة حسابية حدها الأولى  $u = ١$ ،  $u_2 = ٢$ ،  $u_3 = ٣$ ، الأولى = ١٠  
 فإن  $n =$  .....  
 [ ٣، ٤، ٥، ٦ ]
- ⑦ إذا كان  $p$  هو مجموع  $m$  من الأوساط الحسابية أدخلت بين العددين  $a$ ،  $b$ ،  $c$   
 هو مجموع  $n$  من الأوساط الحسابية أدخلت بين  $m$ ،  $n$   
 فإن  $a : b : c =$  .....  
 [ ١ : ٢ : ٣، ٢ : ٣ : ٤، ٣ : ٤ : ٥، ٤ : ٥ : ٦ ]
- ⑧ متتابعة حسابية (٢، ١٢، ٢٤، ٣٦، ٤٨، ...) وكان  $u_n$  الأولى = ٢  
 فإن  $n =$  .....  
 [  $\frac{1}{4}(u - u_1)$ ،  $u - u_1$ ،  $\frac{1}{4}(u - u_1)$ ،  $(u - u_1)$  ]
- ⑨ إذا كانت النسبة بين مجموع حدود عددها  $n$  من متابعتين حسابيتين كنسبة  

$$\frac{u_1 \text{ من الأولى}}{u_2 \text{ من الثانية}} : (١ + u_2) : (٤ + u_2)$$
 فإن  $\frac{u_1 \text{ من الأولى}}{u_2 \text{ من الثانية}} =$  .....  
 [  $\frac{7}{9}$ ،  $\frac{9}{7}$ ،  $\frac{36}{25}$ ،  $\frac{25}{36}$  ]



(١٠) متتابعة حسابية عدد حدودها ٣  $u$  حدًا ومجموع حدودها  $= h$  فإذا كان مجموع

$u$  حدًا الأولى  $= s$ ، مجموع  $u$  حدًا التالية  $= ص$ ، ومجموع  $u$  حدًا الأخيرة  $= ع$

فإن  $h = \dots\dots\dots [س + ع \text{ في } ٣ ص \text{ في } ٣ ع \text{ في } ٢ س]$

(١١) إذا كان مجموع  $u$  حدًا الأولى من متتابعة حسابية يتناسب مع  $u^2$  فإن حدها

العام  $ع$  يتناسب مع  $\dots\dots\dots [٣ u \text{ في } \frac{1}{4} u \text{ في } ١ - u \text{ في } ١ - ٢ u]$

(١٢) متتابعة حسابية فيها  $h$  ابتداء من حدها الأولى  $= ٢ u$ ،  $h$  ابتداء من حدها

الأول  $= u$  فإن  $h$  ابتداء من حدها الأول  $= \dots\dots\dots$

$[١٠ - u \text{ في } ١٠ u \text{ في } ٥ u \text{ في } ٥ - u]$

(١٣) متتابعة حسابية فيها  $ع = u$  (عدد الحدود للمتتابعة)،  $h = u$  فإن  $u = \dots\dots\dots$

$[١١ \text{ في } ١٢ \text{ في } ١٤ \text{ في } ١٥]$

(١٤) متتابعة حسابية مجموع حدودها ٩٣٠، وحدانها الأوسطان ٢٢، ٢٤ حيث عدد حدودها

زوجي فإن حدها الأخير  $= \dots\dots\dots [٥٢ \text{ في } ٥٢,٥ \text{ في } ٥٣ \text{ في } ٥٣,٥]$

(١٥) كم حدًا يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول من المتتابعة (ع) حيث  $ع = ٢ + ٣$  حتى

تكون النسبة بين مجموع ثلث الأول من هذه الحدود إلى مجموع باقي الحدود كنسبة

٥١:٧

$(٧ - ٥)$

(١٦) كم حدًا يلزم أخذه ابتداء من الحد الأول للمتتابعة (ع)  $= (٤ + ٧)$  حتى يكون

مجموع الثلث الأخير منها يساوي أربعة أمثال مجموع الثلث الأول ؟

[١٨]

(١٧) أثبت أن (لر س ص  $١ - ٢$ ) متتابعة حسابية حيث ص عدد صحيح موجب وإذا كانت

$س = ١٦٠$ ،  $ص = \frac{1}{4}$  فأوجد مجموع الحدود التسعة الأولى من هذه المتتابعة بنون

استخدام الآلة الحاسبة.

[٩]

(١٨) يودع رجل مبلغ ثابت في بداية كل شهر في بنك يعطى فائدة بسيطة قدرها ١٠٪ في

السنة وفي نهاية العام حسب له البنك العوائد فكانت ١١٧ جنيهًا فكم المبلغ الذي كان

يودعه الرجل شهريًا.

[١٨]





(474)



$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما تكون } n \text{ عددًا فرديًا} \\ \text{عندما تكون } n \text{ عددًا زوجيًا} \end{array} \right\} = u_n$$

3002 6 547 6 51]



10.  $\{ \dots, 6, 4, 2, 0 \}$  is  $\{ \dots, 6, 4, 2, 0 \}$





## المتتابعة الهندسية

الدروس

٥

لاحظ في المتتابعة الحسابية أن كل حد يزيد عن الحد السابق له بمقدار ثابت مثل المتتابعة (١، ٣، ٥، ٧، ٩، ...) وإذا طرحنا أي حد - الحد السابق له يكون الناتج مقدار ثابت هو أساس المتتابعة ، والآن سوف ندرس نوع آخر من المتتابعات مثل المتتابعة (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...) ونلاحظ فيها أن كل حد ينتج من ضرب الحد السابق له في ٢ (أي في مقدار ثابت) وأنه عند قسمة أي حد على الحد السابق له يكون الناتج مقدار ثابت فلاحظ في هذه المتتابعة أن:

$$٢ = \frac{٢}{١} = \frac{٤}{٢} = \frac{٨}{٤} = \frac{١٦}{٨} \text{ وهكذا } \dots$$

وفي هذه الحالة نسمى هذه المتتابعة بالمتتابعة الهندسية ويمكن تعريفها كما يلي:

تعريف:

تسمى متتابعة (ع<sub>n</sub>) حيث ع<sub>n</sub> ≠ ٠، متتابعة هندسية إذا كان:

$$\frac{ع_{n+1}}{ع_n} = \text{مقدار ثابت لكل } n \in \mathbb{N}^*$$

ويسمى المقدار الثابت أساس المتتابعة ويرمز له بالرمز r



$$\text{حيث: } r = \frac{u}{1+u} = \frac{u}{1+u} = \frac{u}{1+u}$$

أي أن:  $r$  (أساس المتتابعة الهندسية) =  $\frac{\text{أي حد من المتتابعة}}{\text{الحد السابق له مباشرة}}$

## مثال

اكتب الأربعة حدود الأولى للمتتابعة  $(u, r)$  فيما يأتي ثم بين أيهما يكون متتابعة هندسية وأوجد أساسها:

$$① (u, r) = (3 \times 2^4, 2)$$

$$② (u, r) = (5, 0.5) \text{ (حيث } 0.5 < 1)$$

## الحل

$$① \text{ لإيجاد الحد الأول نضع } u = 1$$

$$\text{لإيجاد الحد الثاني نضع } u = 2$$

$$\text{لإيجاد الحد الثالث نضع } u = 3$$

$$\text{لإيجاد الحد الرابع نضع } u = 4$$

$$\therefore \text{الحدود الأربعة الأولى هي } 1, 2, 3, 4$$

ولعرفة ما إذا كانت المتتابعة هندسية أم لا نوجد النسبة  $\frac{1+u}{u}$  فإذا كانت = مقدار ثابت تكون المتتابعة هندسية وإذا كانت = مقدار متغير يعتمد على  $u$  فإن المتتابعة ليست هندسية

$$\therefore \text{المتتابعة هندسية} \quad \text{مقدار ثابت} = 2 = \frac{1+u}{u} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$② \text{ بنفس الطريقة السابقة نجد الحدود الأربعة الأولى هي } 5, 2.5, 1.25, 0.625$$

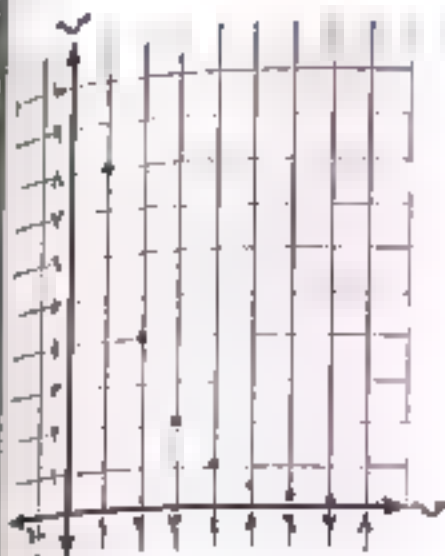
$$\therefore \text{المتتابعة ليست هندسية} \quad \text{مقدار متغير يعتمد على } u = \frac{1+u}{u} = \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}$$

$$③ \therefore u = 1 - u \times \frac{1}{4} \text{ (حيث } 0.25 < 1)$$

$$\therefore \text{المتتابعة هندسية وأساسها } r = \frac{1}{4}$$



### ⑤ التمثيل البياني للمتتابعات الهندسية



تمثيل متتابعة هندسية مثل  $(\dots, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots)$   
فلنلاحظ أن:

مجال المتتابعة هو  $\{ \dots, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots \}$

ومدى المتتابعة هو  $\{ \dots, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots \}$

وتكون الأزواج المرتبة الممنوعة للمتتابعة هي:

$\{ \dots, (2, 4), (4, 8), (8, 16), (16, 32), (32, 64), (64, 128), (128, 256), (256, 512), (512, 1024), \dots \}$

ونلاحظ من الشكل البياني أن:

حدود المتتابعة متناقصة حيث  $1 < r < 1$

التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية يتبع الدالة الأسية وليس دالة من الدرجة الأولى  
كما في المتتابعة الحسابية

### ⑥ المتتابعة الهندسية المتناقصية والمتزايدة

المتتابعة الهندسية يمكن أن تكون تزايدية أو تناقصية أو متناوبة الإشارة تبعاً لحالات الاختيار.

① إذا كان  $r$  موجب،  $r < 1$  فإن المتتابعة تزايدية

فمثلاً المتتابعة  $(\dots, 8, 4, 2, 1, \dots)$

حيثما الأول  $r = 1$  (عدد موجب) وأساسها  $r = 2$  (عدد موجب) لذلك فإن المتتابعة تزايدية

② إذا كان  $r$  موجب،  $r > 1$  فإن المتتابعة تناقصية

فمثلاً المتتابعة  $(\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots)$

حيثما الأول  $r = 2$  (عدد موجب) وأساسها  $r = \frac{1}{2}$  (عدد موجب) لذلك فإن المتتابعة تناقصية

③ إذا كان  $r$  موجب،  $r < 1$  فإن المتتابعة متناوبة الإشارة

④ إذا كان  $r$  سالب،  $r < 1$  فإن المتتابعة تناقصية

⑤ إذا كان  $r$  سالب،  $r > 1$  فإن المتتابعة تزايدية

⑥ إذا كان  $r$  سالب،  $r < 1$  فإن المتتابعة متناوبة الإشارة

### ملاحظات هامة

① أساس المتتابعة الهندسية لا يساوي صفر

② إذا كان الأساس مساوياً للواحد الصحيح فإن المتتابعة تكون ثابتة مثل المتتابعة

$(\dots, 1, 1, 1, 1, 1, \dots)$



### ١٠ التحديد الأولي (العام) للمتتابعة الهندسية

إذا كان الحد الأول في متتابعة هندسية هو  $u$  والأس  $r$  فإن:

$$u_1 = u, \quad u_2 = ur, \quad u_3 = ur^2, \quad u_4 = ur^3, \quad \dots, \quad u_n = ur^{n-1}$$

نلاحظ أن:  $u_n$  يقل بمقدار الوحدة عن رتبة الحد (ترتيب الحد)

أي أن:  $u_1 = u, u_2 = ur, u_3 = ur^2, \dots, u_n = ur^{n-1}$  وهكذا وبالإستمرار على هذا نمط نجد أن

$$u_n = ur^{n-1} \quad \text{الحد النوني لهذه المتتابعة هو}$$

#### مثال تطبيقي

إذا كانت المتتابعة الهندسية منتهية وعند حدودها  $n$  فإنه يرمز لحدها الأخير

بالرمز  $u_n$  حيث  $u_n = ur^{n-1}$  وتكون الصورة العامة للمتتابعة الهندسية هي هذه

$$u, ur, ur^2, \dots, ur^{n-1}$$

ونلاحظ أن: أي حد في هذه المتتابعة = قيمة الحد السابق له مباشرة  $\times$  الأس

أي أن الحد النوني (العام) بمتتابعة الهندسية هو:

$$u_n = ur^{n-1} \quad \text{أو} \quad u_n = ur^{n-1} \quad \text{لكل } n \geq 1$$

حيث  $u$  الحد النوني (الحد العام)،  $n$  الحد الأخير،  $u$  الحد الأول،  $r$  عند حدود المتتابعة (رتبة الحد)،  $r$  أساس المتتابعة.

### ١١ التحديد الثاني للمتتابعة الهندسية (الكتابة المتكررة لهذه المتتابعة)

كتابة المتتابعة الهندسية التي فيها  $u = 1, r = 2$  مثلاً تلعب الآتي:

نكتب قيمة  $u$  (العدد 1) ثم نضغط علامة  $=$  ثم نضغط على المفتاح  $\times$  ونضع

قيمة  $r$  (العدد 2) ثم نضغط علامة  $=$  فتعطي الحد الثاني للمتتابعة ويتكرر

الضغط على علامة  $=$  تعطي الحدود التالية وهكذا ....



### مثال ٢

بين أن المتتابة  $(12, 36, 108, \dots)$  متتابة هندسية ثم  
أوجد  $u_7$  و  $u_{10}$ .

### الحل

$$\therefore \text{المتتابة هندسية} \quad \frac{1}{1} = \frac{3}{12} = \frac{108}{36}, \quad \frac{1}{1} = \frac{12}{36} = \frac{36}{108} \therefore$$

$$\frac{3}{12} = \frac{12}{36} = \left(\frac{1}{1}\right) \times 12 = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}$$

$$\frac{108}{36} = \frac{36}{12} = \left(\frac{1}{1}\right) \times 12 = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}$$

### مثال ٣

أوجد المتتابة الهندسية التي حدها الثاني ١٠ وحدها الرابع ٤٠.

### الحل

$$\textcircled{1} \quad 10 = \sqrt[3]{1} \quad 10 = \sqrt[3]{1}$$

$$\textcircled{2} \quad 40 = \sqrt[3]{1} \quad 40 = \sqrt[3]{1}$$

$$\frac{40}{10} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}} \therefore \text{بقسمة } \textcircled{2} \text{ على } \textcircled{1} :$$

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \quad 4 = \sqrt[3]{1}$$



إذا كان  $u_n$  فرديًا فإننا نحصل  
على قيمة واحدة للأساس  $(n)$  وإذا  
كان  $u_n$  زوجيًا فإننا نحصل  
على قيمتين للأساس  $(n)$ .

وتكون المتتابة هي  $(5, 10, 20, 40, \dots)$

$\therefore$  عندما  $n = 1$  يكون  $u = 5$

وتكون المتتابة هي  $(-5, -10, -20, -40, \dots)$

وعندما  $n = -1$  يكون  $u = -5$



## مثال

متتابعة هندسية حدها الثاني يزيد عن حدها الأول بمقدار ٣ وحدها الثالث يزيد عن حدها الأول بمقدار ٩ أوجد المتتابعة وأوجد رتبة الحد التي قيمته ١٩٢

## الحل

$$\begin{aligned} 3 &= a_2 - a_1 \quad \therefore 3 = 1 - a_1 \quad \therefore a_1 = -2 \\ 9 &= a_3 - a_1 \quad \therefore 9 = 1 - a_1^2 \quad \therefore a_1^2 = -8 \\ \therefore \frac{9}{3} &= \frac{(1 - a_1^2)}{(1 - a_1)} \quad \text{بقسمة ② على ①} \end{aligned}$$

$$\boxed{3 = -a_1} \quad \therefore a_1 = 3 \quad \therefore \frac{9}{3} = \frac{(1 + a_1)(1 - a_1)}{(1 - a_1)}$$

$$\boxed{3 = 1} \quad \therefore a_1 = 1 \quad \therefore \text{وبالتعويض في المعادلة ①}$$

$\therefore$  المتتابعة هي (٣، ١، ١/٣، ...)

لإيجاد رتبة الحد الذي قيمته ١٩٢ نعوض في لحد العام

$$\begin{aligned} 192 &= a_n \quad \therefore 192 = 1 \cdot (-2)^{n-1} \quad \therefore 192 = (-2)^{n-1} \\ \therefore 192 &= 2^{n-1} \quad \therefore 192 = 2^7 \quad \therefore n-1 = 7 \quad \therefore n = 8 \end{aligned}$$

$$\boxed{n = 8} \quad \therefore 192 = 2^7 \quad \therefore n-1 = 7 \quad \therefore n = 8$$

## مثال

متتسمة هندسية حدودها موجبة فإذا كان حدها الثالث يزيد عن حدها الخامس بمقدار ٢٠ ومجموع الحدود الثالث والرابع والخامس ٧٦ أوجد المتتابعة

## الحل

$$20 = a_3 - a_5 \quad \therefore 20 = a_3 - a_3 r^2$$

$$\text{①} \quad 20 = a_3(1 - r^2)$$

$$76 = a_3 + a_4 + a_5 \quad \therefore 76 = a_3 + a_3 r + a_3 r^2$$

$$\text{②} \quad 76 = a_3(1 + r + r^2)$$







## مثال

إذا كان الحد الأخير من متتابعة هندسية موجبة  $= 256$  ومجموع الثلاث حدود الأخيرة منها  $= 448$  فأوجد أساسها ، وإذا كان مجموع الثلاث حدود الأولى منها  $= 14$  فأوجد المتتابعة

## الحل

∴ الحد الأخير  $= 256$

$$\therefore \text{مجموع الثلاث حدود الأخيرة} = 256 + \frac{256}{r} + \frac{256}{r^2} = 448$$

$$\therefore 448 = (1 + r + r^2) \frac{256}{r^2} \quad (\text{بالقسمة على } 256)$$

$$\therefore 4 = (1 + r + r^2) \frac{1}{r^2}$$

$$\therefore 4 = 1 - r + r^2 - r^3$$

$$\therefore 4 = 1 - r + r^2 - r^3$$

$$\therefore \frac{4}{3} = r \quad (\text{مرفوعة}) \quad \boxed{r = 3}$$

$$\therefore 0 = (2 - r)(2 + r^3)$$

$$\therefore 14 = (r^2 + r + 1) \cdot 1$$

$$\therefore 14 = r^2 + r + 1$$

$$\boxed{r = 1}$$

$$\therefore 14 = 1 + 1 + 1$$

$$\therefore 14 = (1 + 1 + 1) \cdot 1$$

∴ المتتابعة هي  $(2, 4, 8, \dots, 256)$



## تمرين

راجع معاً واختم لفستك

اختبار تراكمي

الحدود العتية



١ اجب عن الأسئلة الآتية :

- ١ تسمى المتتالية التي قد عدتها  $u_n = 1 + n$  بأنها متتالية .....  
[تزايدية ( ) تناقصية ( ) ثابتة ( )]  
٢ تكتب المتسلسلة الحسابية  $3 + 7 + 11 + \dots + 35$  باستخدام رمز المجموع على الصورة .....

$$\left[ \sum_{k=1}^n (1-2^k) \quad \sum_{k=1}^n (1-2^k) \quad \sum_{k=1}^n (1-2^k) \quad \sum_{k=1}^n (1-2^k) \right]$$

- ٣ إذا كان  $1 + 2 + 3 + \dots + 17 = 153$  ثلاث حدود متتالية من متتالية حسابية  
فإن  $n = \dots$   
٤ مجموع المتسلسلة الحسابية  $\sum_{k=1}^n (1 + 2^k) = \dots$   
[ ٦٤ ( ) ٧٢ ( ) ٧٦ ( ) ٨٠ ( ) ]

٥ في المتسلسلة الحسابية  $(3 + 6 + 9 + 12 + \dots)$  أوجد :

- ( أ ) مجموع ١٥ حداً الأولى منها  
( ب ) مجموع حدود المتسلسلة ابتداءً من الحد الخامس ( إلى الخامس عشر )

- ٦ أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية التي حدها الأول يساوي ٣ وحدها الأخير يساوي ٣٩ ومجموعه حدها الأول منها يساوي ٢١٠





## ثانياً مسائل المستوى الأول

٢١) في المتتابعة الهندسية (٣، ١٢، ٦٤، ٣٠٠، ...) أوجد شكل من:  $a_n$ ،  $b_n$ ،  $c_n$  [٣٨٠، ٩١]

٢٢) بين أن المتتابعة (٢، ١٢، ٨٠، ٤٤٤، ...) متتابعة هندسية وأوجد  $b_n$  [٦٧٤]

٢٣) متتابعة هندسية حدها الأول = ٤ وأساسها = ٢

أكتب الخمسة حدود الأولى منها. [٦٤٤، ٣٢٥، ٣١٤، ٨١١]

٢٤) متتابعة هندسية أساسها = ٢ وحدها التاسع = ٢٥٦

أوجد المتتابعة وأوجد  $a_n$ ،  $b_n$ ،  $c_n$  [٦٤٤، ٣٩١، ...، ٤٤٤، ٣٢٥، ٣١٤]

٢٥) في المتتابعة (١، ٣٦، ٧٢، ١٠٨، ...) أوجد  $a_n$ ،  $b_n$ ،  $c_n$ ، الحد النوني  $[ \frac{1}{3} \times 108 \times \frac{1}{3} ]$  [١٠٨]

٢٦) أوجد عدد حدود المتتابعة (١، ١٢٨، ٢٥٦، ٣٨٤، ٥١٢، ...)  $(\frac{1}{8})$  [١٣]

٢٧) متتابعة هندسية أساسها =  $\frac{1}{4}$  وحدها الثالث = ٢٤ أوجد هذه المتتابعة.

[١٠٨، ٢٧٤، ٤٨٠، ٩٦٠]

٢٨) في المتتابعة الهندسية (١، ٩، ٢٧، ٨١، ...) أوجد  $a_n$ ،  $b_n$ ،  $c_n$  [١٩٦، ٣٠، ٨١]

٢٩) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١) الحد الخامس من المتتابعة (١، ٣، ٩، ...) حيث  $a_n = 3^{n-1}$  يساوي ..... [١٩٦]

[١٩٦، ٢٧٢، ٢١٦، ١٦٢، ٨١]

٢) الحد السابع من المتتابعة الهندسية (١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...) هو ..... [١٩٦]

[١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣]

٣) الحد النوني للمتتابعة الهندسية (١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...) هو ..... [١٩٦]

[١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩، ٢١٨٧، ٦٥٦١، ١٩٦٨٣]

٤) الحد السادس من المتتابعة الهندسية (١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...) هو ..... [١٩٦]

[١٩٦، ٢٧٢، ٢١٦، ١٦٢، ٨١]

٥) الحد السادس من المتتابعة الهندسية (١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...) هو ..... [١٩٦]

[١، ٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣]



اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١) الحد التالي في المتتابعة الهندسية  $(\dots, \frac{27}{8}, \frac{9}{4}, 6, 8, \dots)$  هو .....

[  $\frac{81}{27}$  ،  $\frac{9}{4}$  ،  $\frac{27}{16}$  ،  $\frac{11}{8}$  ]

٢) جميع المتتابعات الآتية هندسية ما عدا المتتابعة .....

[  $(1, 1, 1, 1, \dots)$  ،  $(1, 2, 4, 8, \dots)$  ،  $(1, 2, 3, 4, \dots)$  ،  $(1, 2, 4, 8, \dots)$  ]

[  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$  ،  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$  ،  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots)$  ]

٣) تمثل حدود المتتابعة الهندسية مجموعة من النقاط المنفصلة التي تقع على .....

[ استقامة واحدة ، منحنى دالة تربيعية ، منحنى دالة أسية ، منحنى دالة تكعيبية ]

٤) تسمى المتتابعة  $(u_n)$  هندسية إذا كان .....

[ يساوي مقدار ثابت (لكل  $n \geq 1$ ) ، يساوي مقدار ثابت (لكل  $n \geq 1$ ) ، يساوي مقدار ثابت (لكل  $n \geq 1$ ) ]

[  $\frac{u_n}{1+u_n}$  ،  $u_n - 1 + u_n$  ،  $1 + u_n - u_n$  ،  $\frac{u_n}{1+u_n}$  ]

٥) المتتابعة الهندسية من بين المتتابعات الآتية هي .....

[  $(u_n) = (2^n)$  لكل  $n \leq 1$  ،  $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$  لكل  $n \leq 2$  ،  $(u_n) = (\frac{1}{2})^n$  لكل  $n \leq 1$  ]

[  $(u_n) = (1 - 2^n)$  لكل  $n \leq 1$  ،  $(u_n) = (2^n \times 3)$  لكل  $n \leq 1$  ]

٦) تكون المتتابعة الهندسية تناقصية إذا كان أساسها .....

[  $[-1, 0]$  ،  $1 < 0$  ،  $0 < 1$  ،  $0 < 1$  ]

## مسائل المستوى الثاني

١) بين نوع متتابعة  $(u_n) = 5 \times 2^n$  قم أوجد حدودها الثلاثة الأولى [٣, ٢, ١, ١]

٢) أثبت أن المتتابعة  $(u_n) = 2^{n+1}$  هي متتابعة هندسية وأكتب الأربعة حدود الأولى منها.

[٣, ٢, ١, ١]

٣) أثبت أن المتتابعة التي حدودها الأولى يساوي  $2 \times 3^n - 2$  متتابعة هندسية ثم

أوجد حدودها السابع

[٣]



١٦) أوجد عند حدود المتتابعة (١٤٥٨٤ - - - ٤٩٨٤٦٤٢) [١٧]

٢) في المتتابعة الهندسية  $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots)$  أوجد :

( أ ) حدها العاشر. ( ب ) رتبة الحد الذي قيمته  $1024 = 2^9$  [١٨]

٧) أوجد رتبة أول حد أصغر من الواحد الصحيح في المتتابعة (٧٢٩٤٧٢٣٤٢٤٣٤٨٩٤٠٠٠) [١٩]

٨) متتابعة هندسية حدها الرابع = ٨ وحدها السابع = ٦٤ أوجد هذه المتتابعة. [٢٠]

٩) متتابعة هندسية فيها  $u_7 = 192$   $u_8 = 384$  أوجد المتتابعة. [٢١]

١٠) متتابعة هندسية حدها الثاني  $\frac{1}{4}$  وحدها الخامس  $\frac{1}{256}$  أوجد هذه المتتابعة [٢٢]

١١) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وحدها الأول يساوي أربعة أمثال حدها

الثالث ومجموع حديها الثاني والخامس = ٣٦ أوجد هذه المتتابعة. [٢٣]

١٢) متتابعة هندسية حدها الأول  $\frac{1}{4}$  وحدها الأخير ٦٤ وعدد حدودها ٨

أوجد المتتابعة. [٢٤]

١٣) متتابعة هندسية حدها الرابع يساوي ١٢ ومجموع حديها الثالث والخامس ٣٠

أوجد المتتابعة. [٢٥]

١٤) متتابعة هندسية مجموع حديها الثاني والثالث يساوي ٢٠ ومجموع حدودها الثلاثة

الأولى يساوي ٦٥ بين أن هناك متتابعتين وأوجد هما. [٢٦]

١٥) إذا كان مجموع الحدين الأول والثاني من متتابعة هندسية = ٩ ومجموع الحدين

السادس والسابع منها يساوي ٢٨٨ فأوجد المتتابعة. [٢٧]

١٦) متتابعة هندسية حدها الثالث يزيد عن حدها الثاني بمقدار ١٦ وحدها الثاني يزيد عن

حدها الأول بمقدار ٤ أوجد المتتابعة [٢٨]

١٧) متتابعة هندسية أساسها عند صحيح موجب فيها  $u_1 \times u_2 = u_3$   $u_1 = 3$   $u_2 = 9$

أوجد المتتابعة. [٢٩]



١٨) متتابعة هندسية فيها  $u_5 = 5$ ،  $u_7 = \frac{1}{5}$  أوجد المتتابعة.  $\left[ \left( 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125}, \frac{1}{15625}, \frac{1}{78125} \right) \right]$

١٩) (ع) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة فإذا كان  $u_1 + u_3 = 10$ ،  $u_2 + u_4 = 20$  أوجد المتتابعة ثم أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٨٠.  $[1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 131072, 262144, 524288, 1048576, 2097152, 4194304, 8388608, 16777216, 33554432, 67108864, 134217728, 268435456, 536870912, 1073741824, 2147483648, 4294967296, 8589934592, 17179869184, 34359738368, 68719476736, 137438953472, 274877906944, 549755813888, 1099511627776, 2199023255552, 4398046511104, 8796093022208, 17592186044416, 35184372088832, 70368744177664, 140737488355328, 281474976710656, 562949953421312, 1125899906842624, 2251799813685248, 4503599627370496, 9007199254740992, 18014398509481984, 36028797018963968, 72057594037927936, 144115188075855872, 288230376151711744, 576460752303423488, 1152921504606846976, 2305843009213693952, 4611686018427387904, 9223372036854775808, 18446744073709551616, 36893488147419103232, 73786976294838206464, 147573952589676412928, 295147905179352825856, 590295810358705651712, 1180591620717411303424, 2361183241434822606848, 4722366482869645213696, 9444732965739290427392, 18889465931478580854784, 37778931862957161709568, 75557863725914323419136, 151115727451828646838272, 302231454903657293676544, 604462909807314587353088, 1208925819614629174706176, 2417851639229258349412352, 4835703278458516698824704, 9671406556917033397649408, 19342813113834066795298816, 38685626227668133590597632, 77371252455336267181195264, 154742504910672534362390528, 309485009821345068724781056, 618970019642690137449562112, 1237940039285380274899124224, 2475880078570760549798248448, 4951760157141521099596496896, 9903520314283042199192993792, 19807040628566084398385987584, 39614081257132168796771975168, 79228162514264337593543950336, 158456325028528675187087900672, 316912650057057350374175801344, 633825300114114700748351602688, 1267650600228229401496703205376, 2535301200456458802993406410752, 5070602400912917605986812821504, 10141204801825835211973625643008, 20282409603651670423947251286016, 40564819207303340847894502572032, 81129638414606681695789005144064, 162259276829213363391578010288128, 324518553658426726783156020576256, 649037107316853453566312041152512, 1298074214633706907132624082305024, 2596148429267413814265248164610048, 5192296858534827628530496329220096, 10384593717069655257060992658440192, 20769187434139310514121985316880384, 41538374868278621028243970633760768, 83076749736557242056487941267521536, 166153499473114484112975882535043072, 332306998946228968225951765070086144, 664613997892457936451903530140172288, 1329227995784915872903807060280344576, 2658455991569831745807614120560689152, 5316911983139663491615228241121378304, 10633823966279326983230456482242756608, 21267647932558653966460912964485513216, 42535295865117307932921825928971026432, 85070591730234615865843651857942052864, 170141183460469231731687303715884105728, 340282366920938463463374607431768211456, 680564733841876926926749214863536422912, 1361129467683753853853498429727072845824, 2722258935367507707706996859454145691648, 5444517870735015415413993718908291383296, 10889035741470030830827987437816582766592, 21778071482940061661655974875633165533184, 43556142965880123323311949751266331066368, 87112285931760246646623899502532662132736, 174224571863520493293247799005065324265472, 348449143727040986586495598010130648530944, 696898287454081973172991196020261297061888, 1393796574908163946345982392040522594123776, 2787593149816327892691964784081045188247552, 5575186299632655785383929568162090376495104, 11150372599265311570767859136324180752990208, 22300745198530623141535718272648361505980416, 44601490397061246283071436545296723011960832, 89202980794122492566142873090593446023921664, 178405961588244985132285746181186892047843328, 356811923176489970264571492362373784095686656, 713623846352979940529142984724747568191373312, 1427247692705959881058285969449495136382746624, 2854495385411919762116571938898990272765493248, 5708990770823839524233143877797980545530986496, 11417981541647679048466287755595961091061972992, 22835963083295358096932575511191922182123945984, 45671926166590716193865151022383844364247891968, 91343852333181432387730302044767688728495783936, 182687704666362864775460604089535377456991567872, 365375409332725729550921208179070754913983135744, 730750818665451459101842416358141509827966271488, 1461501637330902918203684832716283019655932542976, 2923003274661805836407369665432566039311865085952, 5846006549323611672814739330865132078623730171904, 11692013098647223345629478661730264157247460343808, 23384026197294446691258957323460528314494920687616, 46768052394588893382517914646921056628989841375232, 93536104789177786765035829293842113257979682750464, 187072209578355573530071658587684226515959365500928, 374144419156711147060143317175368453031918731001856, 748288838313422294120286634350736906063837462003712, 1496577676626844588240573268701473812127674924007424, 2993155353253689176481146537402947624255349848014848, 5986310706507378352962293074805895248510699696029696, 11972621413014756705924586149611790497021399392059392, 23945242826029513411849172299223580994042798784118784, 47890485652059026823698344598447161988085597568237568, 95780971304118053647396689196894323976171195136475136, 191561942608236107294793378393788647952342390272950272, 383123885216472214589586756787577295904684780545900544, 766247770432944429179173513575154591809369561091801088, 1532495540865888858358347027150309183618739122183602176, 3064991081731777716716694054300618367237478244367204352, 6129982163463555433433388108601236734474956488734408704, 12259964326927110866866776217202473468949912977468817408, 24519928653854221733733552434404946937899825954937634816, 49039857307708443467467104868809893875799651909875269632, 98079714615416886934934209737619787751599303819750539264, 196159429230833773869868419475239575503198607639501078528, 392318858461667547739736838950479151006397215279002157056, 784637716923335095479473677900958302012794430558004314112, 1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224, 3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448, 6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896, 12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792, 25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584, 50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168, 100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336, 200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672, 401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344, 803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688, 1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376, 3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752, 6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504, 12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008, 25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016, 51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032, 102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064, 205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128, 411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256, 822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512, 1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024, 3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048, 6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096, 13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192, 26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384, 52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768, 105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536, 210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072, 421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144, 842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288, 1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576, 3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152, 6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304, 13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608, 26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216, 53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432, 107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864, 215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728, 431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456, 862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912, 1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824, 3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648, 6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296, 13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592, 27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184, 55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368, 110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736, 220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472, 441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944, 883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888, 1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776, 3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552, 7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104, 14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208, 28269553036454149273332760011886696253239742350009903329945699220681916416, 56539106072908298546665520023773392506479484700019806659891398441363832832, 113078212145816597093331040047546785012958969400039613319782796882727665664, 226156424291633194186662080095093570025917938800079226639565593765455331328, 452312848583266388373324160190187140051835877600158453279131187530910662656, 904625697166532776746648320380374280103671755200316906558262375061821325312, 1809251394333065553493296640760748560207343510400633813116524750123642650624, 3618502788666131106986593281521497120414687020801267626233049500247285301248, 7237005577332262213973186563042994240829374041602535252466099000494570602496, 14474011154664524427946373126085988481658748083205070504932198000989141204992, 28948022309329048855892746252171976963317496166410141009864396001978282409984, 57896044618658097711785492504343953926634992332820282019728792003956564819968, 115792089237316195423570985008687907853269984665640564039457584007913129639936, 231584178474632390847141970017375815706539969331281128078915168015826259279872, 463168356949264781694283940034751631413079938662562256157830336031652518559744, 926336713898529563388567880069503262826159877325124512315660672063305037119488, 1852673427797059126777135760139006525652319754650249024631321344126610074238976, 3705346855594118253554271520278013051304639509300498049262642688253220148477952, 7410693711188236507108543040556026102609279018600996098525285376506440296955904, 14821387422376473014217086081112052205218558037201992197050570753012880593911808, 29642774844752946028434172162224104410437116074403984394101141506025761187823616, 59285549689505892056868344324448208820874232148807968788202283012051522375647232, 118571099379011784113736688648896417641748464297615937576404566024103044751294464, 237142198758023568227473377297792835283496928595231875152809132048206089502588928, 474284397516047136454946754595585670566993857190463750305618264096412179005177856, 948568795032094272909893509191171341133987714380927500611236528192824358010355712, 1897137590064188545819787018382342682267975428761855001222473056385648716020711424, 3794275180128377091639574036764685364535950857523710002444946112771297432041422848, 7588550360256754183279148073529370729071901715047420004889892225542594864082845696, 15177100720513508366558296147058741458143803430094840009779784451085189728165691392, 30354201441027016733116592294117482916287606860189680019559568902170379456331382784, 607084028820540334662331845882349658325752$



٣٦ متتابعة هندسية النسبة بين مجموع حديها الأول والثالث إلى مجموع حديها الثاني والرابع = ٣ : ١ وحدها السادس = ٣٣ أوجد المتتابعة وحدها التاسع.  $[28611, \dots, 11, 2, 1]$

٣٧ الوسط الحسابي بين الحدين الثاني والرابع من متتابعة هندسية يساوي ١٥ وحاصل ضرب حدها الأول في حدها الخامس يساوي تسعة أمثال حدها الثالث أوجد المتتابعين.  $[1, \dots, 19, 127, 181, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261, 263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 351, 353, 355, 357, 359, 361, 363, 365, 367, 369, 371, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401, 403, 405, 407, 409, 411, 413, 415, 417, 419, 421, 423, 425, 427, 429, 431, 433, 435, 437, 439, 441, 443, 445, 447, 449, 451, 453, 455, 457, 459, 461, 463, 465, 467, 469, 471, 473, 475, 477, 479, 481, 483, 485, 487, 489, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 503, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 523, 525, 527, 529, 531, 533, 535, 537, 539, 541, 543, 545, 547, 549, 551, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 565, 567, 569, 571, 573, 575, 577, 579, 581, 583, 585, 587, 589, 591, 593, 595, 597, 599, 601, 603, 605, 607, 609, 611, 613, 615, 617, 619, 621, 623, 625, 627, 629, 631, 633, 635, 637, 639, 641, 643, 645, 647, 649, 651, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 671, 673, 675, 677, 679, 681, 683, 685, 687, 689, 691, 693, 695, 697, 699, 701, 703, 705, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 725, 727, 729, 731, 733, 735, 737, 739, 741, 743, 745, 747, 749, 751, 753, 755, 757, 759, 761, 763, 765, 767, 769, 771, 773, 775, 777, 779, 781, 783, 785, 787, 789, 791, 793, 795, 797, 799, 801, 803, 805, 807, 809, 811, 813, 815, 817, 819, 821, 823, 825, 827, 829, 831, 833, 835, 837, 839, 841, 843, 845, 847, 849, 851, 853, 855, 857, 859, 861, 863, 865, 867, 869, 871, 873, 875, 877, 879, 881, 883, 885, 887, 889, 891, 893, 895, 897, 899, 901, 903, 905, 907, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925, 927, 929, 931, 933, 935, 937, 939, 941, 943, 945, 947, 949, 951, 953, 955, 957, 959, 961, 963, 965, 967, 969, 971, 973, 975, 977, 979, 981, 983, 985, 987, 989, 991, 993, 995, 997, 999, 1001, 1003, 1005, 1007, 1009, 1011, 1013, 1015, 1017, 1019, 1021, 1023, 1025, 1027, 1029, 1031, 1033, 1035, 1037, 1039, 1041, 1043, 1045, 1047, 1049, 1051, 1053, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1065, 1067, 1069, 1071, 1073, 1075, 1077, 1079, 1081, 1083, 1085, 1087, 1089, 1091, 1093, 1095, 1097, 1099, 1101, 1103, 1105, 1107, 1109, 1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1121, 1123, 1125, 1127, 1129, 1131, 1133, 1135, 1137, 1139, 1141, 1143, 1145, 1147, 1149, 1151, 1153, 1155, 1157, 1159, 1161, 1163, 1165, 1167, 1169, 1171, 1173, 1175, 1177, 1179, 1181, 1183, 1185, 1187, 1189, 1191, 1193, 1195, 1197, 1199, 1201, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1213, 1215, 1217, 1219, 1221, 1223, 1225, 1227, 1229, 1231, 1233, 1235, 1237, 1239, 1241, 1243, 1245, 1247, 1249, 1251, 1253, 1255, 1257, 1259, 1261, 1263, 1265, 1267, 1269, 1271, 1273, 1275, 1277, 1279, 1281, 1283, 1285, 1287, 1289, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299, 1301, 1303, 1305, 1307, 1309, 1311, 1313, 1315, 1317, 1319, 1321, 1323, 1325, 1327, 1329, 1331, 1333, 1335, 1337, 1339, 1341, 1343, 1345, 1347, 1349, 1351, 1353, 1355, 1357, 1359, 1361, 1363, 1365, 1367, 1369, 1371, 1373, 1375, 1377, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1389, 1391, 1393, 1395, 1397, 1399, 1401, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1413, 1415, 1417, 1419, 1421, 1423, 1425, 1427, 1429, 1431, 1433, 1435, 1437, 1439, 1441, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451, 1453, 1455, 1457, 1459, 1461, 1463, 1465, 1467, 1469, 1471, 1473, 1475, 1477, 1479, 1481, 1483, 1485, 1487, 1489, 1491, 1493, 1495, 1497, 1499, 1501, 1503, 1505, 1507, 1509, 1511, 1513, 1515, 1517, 1519, 1521, 1523, 1525, 1527, 1529, 1531, 1533, 1535, 1537, 1539, 1541, 1543, 1545, 1547, 1549, 1551, 1553, 1555, 1557, 1559, 1561, 1563, 1565, 1567, 1569, 1571, 1573, 1575, 1577, 1579, 1581, 1583, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1599, 1601, 1603, 1605, 1607, 1609, 1611, 1613, 1615, 1617, 1619, 1621, 1623, 1625, 1627, 1629, 1631, 1633, 1635, 1637, 1639, 1641, 1643, 1645, 1647, 1649, 1651, 1653, 1655, 1657, 1659, 1661, 1663, 1665, 1667, 1669, 1671, 1673, 1675, 1677, 1679, 1681, 1683, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1699, 1701, 1703, 1705, 1707, 1709, 1711, 1713, 1715, 1717, 1719, 1721, 1723, 1725, 1727, 1729, 1731, 1733, 1735, 1737, 1739, 1741, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1755, 1757, 1759, 1761, 1763, 1765, 1767, 1769, 1771, 1773, 1775, 1777, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1791, 1793, 1795, 1797, 1799, 1801, 1803, 1805, 1807, 1809, 1811, 1813, 1815, 1817, 1819, 1821, 1823, 1825, 1827, 1829, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1843, 1845, 1847, 1849, 1851, 1853, 1855, 1857, 1859, 1861, 1863, 1865, 1867, 1869, 1871, 1873, 1875, 1877, 1879, 1881, 1883, 1885, 1887, 1889, 1891, 1893, 1895, 1897, 1899, 1901, 1903, 1905, 1907, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1919, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1931, 1933, 1935, 1937, 1939, 1941, 1943, 1945, 1947, 1949, 1951, 1953, 1955, 1957, 1959, 1961, 1963, 1965, 1967, 1969, 1971, 1973, 1975, 1977, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025, 2027, 2029, 2031, 2033, 2035, 2037, 2039, 2041, 2043, 2045, 2047, 2049, 2051, 2053, 2055, 2057, 2059, 2061, 2063, 2065, 2067, 2069, 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2085, 2087, 2089, 2091, 2093, 2095, 2097, 2099, 2101, 2103, 2105, 2107, 2109, 2111, 2113, 2115, 2117, 2119, 2121, 2123, 2125, 2127, 2129, 2131, 2133, 2135, 2137, 2139, 2141, 2143, 2145, 2147, 2149, 2151, 2153, 2155, 2157, 2159, 2161, 2163, 2165, 2167, 2169, 2171, 2173, 2175, 2177, 2179, 2181, 2183, 2185, 2187, 2189, 2191, 2193, 2195, 2197, 2199, 2201, 2203, 2205, 2207, 2209, 2211, 2213, 2215, 2217, 2219, 2221, 2223, 2225, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2239, 2241, 2243, 2245, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2257, 2259, 2261, 2263, 2265, 2267, 2269, 2271, 2273, 2275, 2277, 2279, 2281, 2283, 2285, 2287, 2289, 2291, 2293, 2295, 2297, 2299, 2301, 2303, 2305, 2307, 2309, 2311, 2313, 2315, 2317, 2319, 2321, 2323, 2325, 2327, 2329, 2331, 2333, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343, 2345, 2347, 2349, 2351, 2353, 2355, 2357, 2359, 2361, 2363, 2365, 2367, 2369, 2371, 2373, 2375, 2377, 2379, 2381, 2383, 2385, 2387, 2389, 2391, 2393, 2395, 2397, 2399, 2401, 2403, 2405, 2407, 2409, 2411, 2413, 2415, 2417, 2419, 2421, 2423, 2425, 2427, 2429, 2431, 2433, 2435, 2437, 2439, 2441, 2443, 2445, 2447, 2449, 2451, 2453, 2455, 2457, 2459, 2461, 2463, 2465, 2467, 2469, 2471, 2473, 2475, 2477, 2479, 2481, 2483, 2485, 2487, 2489, 2491, 2493, 2495, 2497, 2499, 2501, 2503, 2505, 2507, 2509, 2511, 2513, 2515, 2517, 2519, 2521, 2523, 2525, 2527, 2529, 2531, 2533, 2535, 2537, 2539, 2541, 2543, 2545, 2547, 2549, 2551, 2553, 2555, 2557, 2559, 2561, 2563, 2565, 2567, 2569, 2571, 2573, 2575, 2577, 2579, 2581, 2583, 2585, 2587, 2589, 2591, 2593, 2595, 2597, 2599, 2601, 2603, 2605, 2607, 2609, 2611, 2613, 2615, 2617, 2619, 2621, 2623, 2625, 2627, 2629, 2631, 2633, 2635, 2637, 2639, 2641, 2643, 2645, 2647, 2649, 2651, 2653, 2655, 2657, 2659, 2661, 2663, 2665, 2667, 2669, 2671, 2673, 2675, 2677, 2679, 2681, 2683, 2685, 2687, 2689, 2691, 2693, 2695, 2697, 2699, 2701, 2703, 2705, 2707, 2709, 2711, 2713, 2715, 2717, 2719, 2721, 2723, 2725, 2727, 2729, 2731, 2733, 2735, 2737, 2739, 2741, 2743, 2745, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2759, 2761, 2763, 2765, 2767, 2769, 2771, 2773, 2775, 2777, 2779, 2781, 2783, 2785, 2787, 2789, 2791, 2793, 2795, 2797, 2799, 2801, 2803, 2805, 2807, 2809, 2811, 2813, 2815, 2817, 2819, 2821, 2823, 2825, 2827, 2829, 2831, 2833, 2835, 2837, 2839, 2841, 2843, 2845, 2847, 2849, 2851, 2853, 2855, 2857, 2859, 2861, 2863, 2865, 2867, 2869, 2871, 2873, 2875, 2877, 2879, 2881, 2883, 2885, 2887, 2889, 2891, 2893, 2895, 2897, 2899, 2901, 2903, 2905, 2907, 2909, 2911, 2913, 2915, 2917, 2919, 2921, 2923, 2925, 2927, 2929, 2931, 2933, 2935, 2937, 2939, 2941, 2943, 2945, 2947, 2949, 2951, 2953, 2955, 2957, 2959, 2961, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2973, 2975, 2977, 2979, 2981, 2983, 2985, 2987, 2989, 2991, 2993, 2995, 2997, 2999, 3001, 3003, 3005, 3007, 3009, 3011, 3013, 3015, 3017, 3019, 3021, 3023, 3025, 3027, 3029, 3031, 3033, 3035, 3037, 3039, 3041, 3043, 3045, 3047, 3049, 3051, 3053, 3055, 3057, 3059, 3061, 3063, 3065, 3067, 3069, 3071, 3073, 3075, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3087, 3089, 3091, 3093, 3095, 3097, 3099, 3101, 3103, 3105, 3107, 3109, 3111, 3113, 3115, 3117, 3119, 3121, 3123, 3125, 3127, 3129, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3141, 3143, 3145, 3147, 3149, 3151, 3153, 3155, 3157, 3159, 3161, 3163, 3165, 3167, 3169, 3171, 3173, 3175, 3177, 3179, 3181, 3183, 3185, 3187, 3189, 3191, 3193, 3195, 3197, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3211, 3213, 3215, 3217, 3219, 3221, 3223, 3225, 3227, 3229, 3231, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3243, 3245, 3247, 3249, 3251, 3253, 3255, 3257, 3259, 3261, 3263, 3265, 3267, 3269, 3271, 3273, 3275, 3277, 3279, 3281, 3283, 3285, 3287, 3289, 3291, 3293, 3295, 3297, 3299, 3301, 3303, 3305, 3307, 3309, 3311, 3313, 3315, 3317, 3319, 3321, 3323, 3325, 3327, 3329, 3331, 3333, 3335, 3337, 3339, 3341, 3343, 3345, 3347, 3349, 3351, 3353, 3355, 3357, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3369, 3371, 3373, 3375, 3377, 3379, 3381, 3383, 3385, 3387, 3389, 3391, 3393, 3395, 3397, 3399, 3401, 3403, 3405, 3407, 3409, 3411, 3413, 3415, 3417, 3419, 3421, 3423, 3425, 3427, 3429, 3431, 3433, 3435, 3437, 3439, 3441, 3443, 3445, 3447, 3449, 3451, 3453, 3455, 3457, 3459, 3461, 3463, 3465, 3467, 3469, 3471, 3473, 3475, 3477, 3479, 3481, 3483, 3485, 3487, 3489, 3491, 3493, 3495, 3497, 3499, 3501, 3503, 3505, 3507, 3509, 3511, 3513, 3515, 3517, 3519, 3521, 3523, 3525, 3527, 3529, 3531, 3533, 3535, 3537, 3539, 3541, 3543, 3545, 3547, 3549, 3551, 3553, 3555, 3557, 3559, 3561, 3563, 3565, 3567, 3569, 3571, 3573, 3575, 3577, 3579, 3581, 3583, 3585, 3587, 3589, 3591, 3593, 3595, 3597, 3599, 3601, 3603, 3605, 3607, 3609, 3611, 3613, 3615, 3617, 3619, 3621, 3623, 3625, 3627, 3629, 3631, 3633, 3635, 3637, 3639, 3641, 3643, 3645, 3647, 3649, 3651, 3653, 3655, 3657, 3659, 3661, 3663, 3665, 3667, 3669, 3671, 3673, 3675, 3677, 3679, 3681, 3683, 3685, 3687, 3689, 3691, 3693, 3695, 3697, 3699, 3701, 3703, 3705, 3707, 3709, 3711, 3713, 3715, 3717, 3719, 3721, 3723, 3725, 3727, 3729, 3731, 3733, 3735, 3737, 3739, 3741, 3743, 3745, 3747, 3749, 3751, 3753, 3755, 3757, 3759, 3761, 3763, 3765, 3767, 3769, 3771, 3773, 3775, 3777, 3779, 3781, 3783, 3785, 3787, 3789, 3791, 3793, 3795, 3797, 3799, 3801, 3803, 3805, 3807, 3809, 3811, 3813, 3815, 3817, 3819, 3821, 3823, 3825, 3827, 3829, 3831, 3833, 3835, 3837, 3839, 3841, 3843, 3845, 3847, 3849, 3851, 3853, 3855, 3857, 3859, 3861, 3863, 3865, 3867, 3869, 3871, 3873, 3875, 3877, 3879, 3881, 3883, 3885, 3887, 3889, 3891, 3893, 3895, 3897, 3899, 3901, 3903, 3905, 3907, 3909, 3911, 3913, 3915, 3917, 3919, 3921, 3923, 3925, 3927, 3929, 3931, 3933, 3935, 3937, 3939, 3941, 3943, 3945, 3947, 3949, 3951, 3953, 3955, 3957, 3959, 3961, 3963, 3965, 3967, 3969, 3971, 3973, 3975, 3977, 3979, 3981, 3983, 3985, 3987, 3989, 3991, 3993, 3995, 3997, 3999, 4001, 4003, 4005, 4007, 4009, 4011, 4013, 4015, 4017, 4019, 4021, 4023, 4025, 4027, 4029, 4031, 4033, 4035, 4037, 4039, 4041, 4043, 4045, 4047, 4049, 4051, 4053, 4055, 4057, 4059, 4061, 4063, 4065, 4067, 4069, 4071, 4073, 4075, 4077, 4079, 4081, 4083, 4085, 4087, 4089, 4091, 4093, 4095, 4097, 4099, 4101, 4103, 4105, 4107, 4109, 4111, 4113, 4115, 4117, 4119, 4121, 4123, 4125, 4127, 4129, 4131, 4133, 4135, 4137, 4139, 4141, 4143, 4145, 4147, 4149, 4151, 4153, 4155, 4157, 4159, 4161, 4163, 4165, 4167, 4169, 4171, 4173, 4175, 4177, 4179, 4181, 4183, 4185, 4187, 4189, 4191, 4193, 4195, 4197, 4199, 4201, 4203, 4205, 4207, 4209, 4211, 4213, 4215, 4217, 4219, 4221, 4223, 4225, 4227, 4229, 4231, 4233, 4235, 4237, 4239, 4241, 4243, 4245, 4247, 4249, 4251, 4253, 4255, 4257, 4259, 4261, 4263, 4265, 4267, 4269, 4271, 4273, 4275, 4277, 4279, 4281, 4283, 4285, 4287, 4289, 4291, 4293, 4295, 4297, 4299, 4301, 4303, 4305, 4307, 4309, 4311, 4313, 4315, 4317, 4319, 4321, 4323, 4325, 4327, 4329, 4331, 4333, 4335, 4337, 4339, 4341, 4343, 4345, 4347, 4349, 4351, 4353, 4355, 4357, 4359, 4361, 4363, 43$



**یساوی**  $\rightarrow$  مساوی

② في المتابعة الهندسية (٢٥٦، ١٢٨، ٦٤٤، ١٠٠٠) فإن رقبة أول حبل أصغر من الواحد

الشيخ محمد بن عبد الوهاب

③ في المتابعة الهندسية (١٦٦٣، ...) القيمة أول حد تزيد قيمته عن ٢٠٠ يساوي

(١) متتابعة هندسية أساسها  $\ell$ ,  $\ell^2 = \ell \cdot \ell$ ,  $\ell^3 = \ell \cdot \ell \cdot \ell$ , ...

**طیان حدیثا الاول** = طیان حدیث اول

(د) متتابعة هندسية فيها  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 2$ ,  $u_3 = 4$ ,  $u_4 = 8$ ,  $u_5 = 16$ ,  $u_6 = 32$ ,  $u_7 = 64$ ,  $u_8 = 128$ ,  $u_9 = 256$ ,  $u_{10} = 512$ ,  $u_{11} = 1024$ ,  $u_{12} = 2048$ ,  $u_{13} = 4096$ ,  $u_{14} = 8192$ ,  $u_{15} = 16384$ ,  $u_{16} = 32768$ ,  $u_{17} = 65536$ ,  $u_{18} = 131072$ ,  $u_{19} = 262144$ ,  $u_{20} = 524288$ ,  $u_{21} = 1048576$ ,  $u_{22} = 2097152$ ,  $u_{23} = 4194304$ ,  $u_{24} = 8388608$ ,  $u_{25} = 16777216$ ,  $u_{26} = 33554432$ ,  $u_{27} = 67108864$ ,  $u_{28} = 134217728$ ,  $u_{29} = 268435456$ ,  $u_{30} = 536870912$ ,  $u_{31} = 1073741824$ ,  $u_{32} = 2147483648$ ,  $u_{33} = 4294967296$ ,  $u_{34} = 8589934592$ ,  $u_{35} = 17179869184$ ,  $u_{36} = 34359738368$ ,  $u_{37} = 68719476736$ ,  $u_{38} = 137438953472$ ,  $u_{39} = 274877906944$ ,  $u_{40} = 549755813888$ ,  $u_{41} = 1099511627776$ ,  $u_{42} = 2199023255552$ ,  $u_{43} = 4398046511104$ ,  $u_{44} = 8796093022208$ ,  $u_{45} = 17592186044416$ ,  $u_{46} = 35184372088832$ ,  $u_{47} = 70368744177664$ ,  $u_{48} = 140737488355328$ ,  $u_{49} = 281474976710656$ ,  $u_{50} = 562949953421312$ ,  $u_{51} = 1125899906842624$ ,  $u_{52} = 2251799813685248$ ,  $u_{53} = 4503599627370496$ ,  $u_{54} = 9007199254740992$ ,  $u_{55} = 18014398509481984$ ,  $u_{56} = 36028797018963968$ ,  $u_{57} = 72057594037927936$ ,  $u_{58} = 144115188075855872$ ,  $u_{59} = 288230376151711744$ ,  $u_{60} = 576460752303423488$ ,  $u_{61} = 1152921504606846976$ ,  $u_{62} = 2305843009213693952$ ,  $u_{63} = 4611686018427387904$ ,  $u_{64} = 9223372036854775808$ ,  $u_{65} = 18446744073709551616$ ,  $u_{66} = 36893488147419103232$ ,  $u_{67} = 73786976294838206464$ ,  $u_{68} = 147573952589676412928$ ,  $u_{69} = 295147905179352825856$ ,  $u_{70} = 590295810358705651712$ ,  $u_{71} = 1180591620717411303424$ ,  $u_{72} = 2361183241434822606848$ ,  $u_{73} = 4722366482869645213696$ ,  $u_{74} = 9444732965739290427392$ ,  $u_{75} = 18889465931478580854784$ ,  $u_{76} = 37778931862957161709568$ ,  $u_{77} = 75557863725914323419136$ ,  $u_{78} = 151115727451828646838272$ ,  $u_{79} = 302231454903657293676544$ ,  $u_{80} = 604462909807314587353088$ ,  $u_{81} = 1208925819614629174706176$ ,  $u_{82} = 2417851639229258349412352$ ,  $u_{83} = 4835703278458516698824704$ ,  $u_{84} = 9671406556917033397649408$ ,  $u_{85} = 19342813113834066795298816$ ,  $u_{86} = 38685626227668133590597632$ ,  $u_{87} = 77371252455336267181195264$ ,  $u_{88} = 154742504910672534362390528$ ,  $u_{89} = 309485009821345068724781056$ ,  $u_{90} = 618970019642690137449562112$ ,  $u_{91} = 1237940039285380274899124224$ ,  $u_{92} = 2475880078570760549798248448$ ,  $u_{93} = 4951760157141521099596496896$ ,  $u_{94} = 9903520314283042199192993792$ ,  $u_{95} = 19807040628566084398385987584$ ,  $u_{96} = 39614081257132168796771975168$ ,  $u_{97} = 79228162514264337593543950336$ ,  $u_{98} = 158456325028528675187087900672$ ,  $u_{99} = 316912650057057350374175801344$ ,  $u_{100} = 633825300114114700748351602688$ ,  $u_{101} = 1267650600228229401496703205376$ ,  $u_{102} = 2535301200456458802993406410752$ ,  $u_{103} = 5070602400912917605986812821504$ ,  $u_{104} = 10141204801825835211973625643008$ ,  $u_{105} = 20282409603651670423947251286016$ ,  $u_{106} = 40564819207303340847894502572032$ ,  $u_{107} = 81129638414606681695789005144064$ ,  $u_{108} = 162259276829213363391578010288128$ ,  $u_{109} = 324518553658426726783156020576256$ ,  $u_{110} = 649037107316853453566312041152512$ ,  $u_{111} = 1298074214633706907132624082305024$ ,  $u_{112} = 2596148429267413814265248164610048$ ,  $u_{113} = 5192296858534827628530496329220096$ ,  $u_{114} = 10384593717069655257060992658440192$ ,  $u_{115} = 20769187434139310514121985316880384$ ,  $u_{116} = 41538374868278621028243970633760768$ ,  $u_{117} = 83076749736557242056487941267521536$ ,  $u_{118} = 166153499473114484112975882535043072$ ,  $u_{119} = 332306998946228968225951765070086144$ ,  $u_{120} = 664613997892457936451903530140172288$ ,  $u_{121} = 1329227995784915872903807060280344576$ ,  $u_{122} = 2658455991569831745807614120560689152$ ,  $u_{123} = 5316911983139663491615228241121378304$ ,  $u_{124} = 10633823966279326983230456482242756608$ ,  $u_{125} = 21267647932558653966460912964485513216$ ,  $u_{126} = 42535295865117307932921825928971026432$ ,  $u_{$

⑥ إذا كان  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  فاحسب  $x^{20} + x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

## فہرست مضامین

[H d 12 d 10 d 11]



## الأوساط الهندسية

الأخرى

٦

علّم أن الأوساط الحسابية هي الحدود الواقعة بين حدين متتاليين في المتتابعة الحسابية وأيضا الأوساط الهندسية هي الحدود الواقعة بين حدين متتاليين في المتتابعة الهندسية ويمكن إيجاد الوسط الهندسي كما بالتعريف التالي :

تعريف

إذا كانت  $a, b, c$  ثلاث حدود متتالية من متتابعة هندسية فإنه يقال أن  $b$  هي الوسط الهندسي بين الكميتين  $a, c$  حيث  $b^2 = ac$  أو  $b = \sqrt{ac}$  أو  $b = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}$

ملاحظات هامة

- لإيجاد الوسط الهندسي لـ  $n$  كميتين لابد وأن تكون الكميتين لهما نفس الإشارة ، أما إذا كانت إحدى الكميتين موجبة والأخرى سالبة فإنه لا يوجد لهما وسط هندسي حقيقي .
- عدد الأوساط = عدد حدود المتتابعة - ٢ =  $n - ٢$
- عدد حدود المتتابعة = عدد الأوساط + ٢
- الوسط الذي ترتيبه  $(r)$  من البداية هو  $r^2$  فمثلاً الوسط السادس هو  $٦^2$  وهكذا ...





### تعريف

الوسيط الهندسي لعدة كميات موجبة عندها  $n$  هو الجذر النوني الموجب لحاصل ضرب هذه الكميات جميعاً أي أن الوسيط الهندسي لهذه الكميات  $= \sqrt[n]{\text{حاصل ضرب هذه الكميات}}$

### مثال ٣

أدخل ٣ أوساط هندسية بين ٣ و ٤٨

### الحل

#### ملاحظة

إذا سأل عدد الأوساط المطلوبة فوجدنا فيها مثالاً مجموعاً لعدد من الأوساط (حل وحيد) أما إذا سأل عدد الأوساط المطلوبة فوجدنا فيها هناك مجموعتين من الأوساط (حلين)

عدد الأوساط = ٣ • عدد حدود المتتابعة = ٣ + ٢ = ٥

$$3 = 1, 2 \quad 48 = 1, 2, 3, 4, 5 \quad 48 = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$48 = 1, 2, 3, 4, 5 \quad 48 = 1, 2, 3, 4, 5 \quad 48 = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\text{عندما } r = 2 \quad \text{الأوساط هي } 2, 4, 8, 16, 32$$

$$\text{عندما } r = \frac{1}{2} \quad \text{الأوساط هي } 24, 12, 6, 3, 1.5$$

### مثال ٤

عدنان وسطيها الحسابي ١٧ ووسطها الهندسي ٤ أوجد العددين

### الحل

نفرض أن العددين  $x$  و  $y$

$$\text{الوسيط الحسابي} = \frac{x+y}{2} = 17 \quad \text{①} \Rightarrow x+y = 34$$

$$\text{الوسيط الهندسي} = \sqrt{xy} = 4 \quad \text{②} \Rightarrow xy = 16$$

بالتعويض من ① في ② :

$$xy = (34-x)x \Rightarrow 16 = 34x - x^2$$

$$x^2 - 34x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{34 \pm \sqrt{34^2 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{34 \pm \sqrt{1156 - 64}}{2} = \frac{34 \pm \sqrt{1092}}{2}$$

$$x = \frac{34 + \sqrt{1092}}{2} \quad y = \frac{34 - \sqrt{1092}}{2}$$

• العددين هما ٩ و ٢٥



## مثال ٣

إذا أدخلت ٥ أوساط هندسية بين عددين وسكن مجموع الوسطين الأول والثالث = ١٠ ومجموع الوسطين الثاني والرابع = ٣٠ فما هي هذه الأوساط ؟

## الحل

نفرض أن الحد الأول  $a$  والأساس  $r$

∴ الوسط الأول  $a, r, ar, ar^2, ar^3, ar^4$  الثاني  $ar, ar^2, ar^3, ar^4$  الثالث  $ar^2, ar^3, ar^4$  الرابع  $ar^3, ar^4$

$$\textcircled{1} \quad 10 = ar + ar^3 \quad \textcircled{2} \quad 30 = ar^2 + ar^4$$

يقسمه  $\textcircled{2}$  على  $\textcircled{1}$  :

$$\frac{30}{10} = \frac{ar^2 + ar^4}{ar + ar^3} \quad \therefore 3 = \frac{(r^2 + 1)r^2}{(r + 1)r} \quad \therefore 3 = r$$

بالتعويض في  $\textcircled{1}$  :

$$10 = ar + ar^3 \quad 10 = 12r + r^3 \quad 10 = 12 + 27$$

∴ الأوساط هي ٨٩٤٢٧٤٩٤٣٤١

## مثال ٤

إذا كانت  $3 + 12 + 1 + 12 + 1 + 12 + 1$  ثلاث حدود متتالية في متتابعة هندسية فأوجد قيمتها

## الحل

∴ المتتابعة هندسية  $a, r, ar, ar^2, ar^3, ar^4, ar^5$  وسط هندسي بين  $3 + 12 + 1$

$$3 + 12 + 1 = 16 + 12 + 1 \quad (3 + 12)(1 + r) = r^2(7 + 1) \quad \therefore 3 + 12 + 1 = 16 + 12 + 1$$

$$16 = 16 - r + r^2 \quad 16 = 16 - 12 - r^2 - 3 + 12 + 1 \quad \therefore 16 = 16 - 12 - r^2 - 3 + 12 + 1$$

$$\frac{16}{11} = 162 = 1 \quad \therefore 162 = (12 + 1)(2 - 1)$$



## مثال

ثلاثة أعداد في تتابع حسابي مجموعها ٣٩ وإذا طرح من العدد الأوسط ٨ فكانت الأعداد الناتجة في تتابع هندسي أوجد هذه الأعداد.

## الحل

نفرض أن الأعداد هي  $x - 1, x, x + 1$

$$39 = (x-1) + x + (x+1) \quad \therefore 39 = 12 \quad \therefore x = 13$$

$\therefore$  الأعداد هي  $12, 13, 14$

وعند طرح ٨ من العدد الأوسط تصبح الأعداد  $12, 5, 14$  هي تتابع هندسي

$$(x+13)(x-13) = 5 \quad \therefore x^2 - 169 = 5$$

$$x^2 = 174$$

$\therefore$  الأعداد هي  $12, 13, 14$

## مثال

ثلاثة أعداد تكون متتابعة هندسية مجموعها ٢٦ وإذا طرح من الأول الواحد أصبح طرح من الثاني ٢ وطرح من الثالث ١١ فكانت الأعداد الناتجة في تتابع حسابي أوجد الأعداد

## الحل

نفرض أن الأعداد هي  $a, ar, ar^2$

$$26 = a + ar + ar^2$$

$$\textcircled{1} - 26 = (a + ar + ar^2)$$

$\therefore$  تكون متتابعة حسابية

$$11 - a + 1 - ar = (2 - r)a$$

$$12 - a + 1 = 6 - ar$$

$$8 = a + ar - 2a$$

$$\textcircled{2} - 8 = (1 + r - 2)r$$

بقسمة  $\textcircled{1}$  على  $\textcircled{2}$ :

$$\frac{26}{8} = \frac{(a + ar + ar^2)}{(1 + r - 2)r}$$

$$\frac{13}{4} = \frac{a + ar + ar^2}{1 + r - 2r}$$

$$13 + 4r - 8r = 4a + 4ar - 4ar^2$$







فيكون الوسط الحسابي بعددين حقيقيين موجبين مختلفين أكبر من  
وسطهما الهندسي

أي أن

إذا كان  $a, b, c$  هـ ثلاث حدود متتالية في متتابعة هندسية فإن  $\frac{a+b}{2} < c$

إذا كان  $a, b, c$  هـ ثلاث حدود متتالية في متتابعة حسابية فإن  $c < \frac{a+b}{2}$

إذا كانت  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$  أعداد حقيقية موجبة فإن:

$$\frac{a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p+q+r+s+t+u+v+w+x+y+z}{20} < \sqrt[20]{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h \cdot i \cdot j \cdot k \cdot l \cdot m \cdot n \cdot o \cdot p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot t \cdot u \cdot v \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z}$$

ولتحقق المساواة فقط عندما  $a = b = c = d = e = f = g = h = i = j = k = l = m = n = o = p = q = r = s = t = u = v = w = x = y = z$

مثال

إذا كانت:  $12, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50$  أعداد موجبة في تتابع هندسي

فانبت أن:  $(4+12) < (50+3)$  هـ  $48 < 53$  هـ

الحل

الوسط الحسابي > الوسط الهندسي

①  $30 < \frac{4+12}{2}$  هـ  $30 < 8$  هـ  $30 < 8$  هـ

②  $10 < \frac{50+3}{2}$  هـ  $10 < 26.5$  هـ  $10 < 26.5$  هـ

من ①، ② بالضرب:

$(4+12) < (50+3)$  هـ  $48 < 53$  هـ



# تمرين

على الأعداد الحقيقية

الاجابة الصحيحة  
عامة وحيدة  
بعض اعداد  
البرهان

أولاً راجع معنا واكمل نفسك

اختيار تم اكملي

الدرجة النهائية



اجب عن الاسئلة الآتية

- ① متتابعة هندسية  $u_n$  -  $u_1 = \frac{2}{3}$  فإن أساس المتتابعة = .....  
 $\left[ \frac{2}{3} \quad \frac{5}{9} \quad 0 \quad 3 \right]$
- ② الحد العاشر من المتتابعة التي حدها  $u_n = \frac{1}{n}$  حيث  $n \geq 1$  هو .....  
 $\left[ \frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{4}{10} \right]$
- ③ الحد الخامس من المتتابعة  $(u_n)$  حيث  $u_n = 2 \times (3)^{n-1}$  يساوي .....  
 $[ 16 \quad 81 \quad 243 \quad 729 ]$
- ④ في المتتابعة الهندسية  $\left( \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, 1, 4, \dots \right)$  رتبة الحد الذي قيمته يساوي 128 هي .....  
 $[ 10 \quad 12 \quad 13 \quad 14 ]$
- ⑤  $(u_n)$  متتابعة هندسية حدها موجبة فيها  $u_1 = \frac{1}{4}, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{2}$  أوجد المتتابعة

- ⑥ مسرح يتسع لـ 16 صفاً فإذا كان الصف الأول يحتوي على 16 مقعداً وكان صف آخر يليه يتسع لعدد من المقاعد يزيد عن الصف الذي يسبقه مباشرة بمقدار 4 مقاعد كم عدد المقاعد بهذا المسرح ؟







- ١) عددان موجبان مجموعهما ٢٠ ووسطهما الهندسي ٨ فما هما العددان ؟ [١١٤]
- ٢) عددان موجبان الفرق بينهما ٨ ووسطهما الهندسي ٣ فما هما العددان ؟ [١١٩]
- ٣) أوجد العددين اللذين وسطهما الحسابي ٥ ووسطهما الهندسي ٣ [١٢١]
- ٤) عددان موجبان الوسط الحسابي لهما ٢٥ ووسطهما الهندسي ٢٠ فما العددان ؟ [١٢٦]

### المسائل المستوى الثاني

- ١) الوسط الحسابي لعددين  $\frac{5}{3}$  ووسطهما الهندسي ٤ وأصغر العددين يساوي ٩ أوجد العدد الآخر [٨٩]
- ٢) إذا أدخلت ٤ أوساط هندسية بين عددين وكان مجموع الوسطين الأول والرابع = ٩٠ ومجموع الوسطين الثاني والثالث = ٩٠ أوجد العددين. [٥٤٦٠]
- ٣) إذا أدخلت عدة أوساط هندسية بين ٢ و١٤٥٨ وكانت النسبة بين مجموع الوسطين الأولين إلى مجموع الوسطين الآخرين هي ١ : ٢٧ أوجد عدد تلك الأوساط. [٥]
- ٤) إذا كان الوسط الهندسي بين س ، ص هو ٩ والوسط الحسابي بين (س + ٤) ، (ص + ٦) هو ١٥ فأوجد قيمتي س ، ص [١٨٠٦]
- ٥) متتابعة هندسية متزايدة جميع حدودها موجبة ، إذا كان الوسط الحسابي لحدديها الثاني والرابع يساوي ٩٨ والوسط الهندسي الموجب لهما يساوي ٣٢ أوجد المتتابعة. [١٣٢١٨١٢٢]
- ٦) أوجد عددين موجبين وسطهما الهندسي الموجب يزيد عن أحدهما بمقدار ٢ ويقل عن الآخر بمقدار ٣ [٩١٤]
- ٧) متتابعة هندسية جميع حدودها موجبة وأساسها أصغر من الواحد الصحيح والوسط الحسابي لحدديها الثالث والخامس يساوي ٣٠ والوسط الهندسي الموجب لهما يساوي ٢٤ أوجد المتتابعة. [١٣٢١٨١٩١٩١٢٢]



١٢ الوسط الحسابي بين الحدين الأول والرابع من متتابة هندسية هو  $\frac{1}{4}$  والوسط الحسابي بين حديها الثاني والثالث هو  $\frac{1}{2}$ .  
 أثبت أنه توجد متتايعتان هندسيتان وأوجدتهما .

١٣ متتابة حسابية حدها الأول - ٤ وحدودها الثاني والخامس والحادي عشر تكون متتابة هندسية أوجد المتتابة

١٤ ثلاثة أعداد في تتابع هندسي مجموعها ١٣ وإذا أضيف لحدها الأوسط ٢ تكونت التواتج متتابة حسابية أوجد الأعداد .

١٥ (ع) متتابة حسابية فيها  $a_4 = 19$  وحدودها  $a_1, a_2, a_3, a_4$  في تتابع هندسي أوجد المتتابة الحسابية .

١٦ متتابة حسابية تزايدية حدها الثامن يساوي ١٥ وحدودها  $a_1, a_2, a_3, a_4$  تكون متتابة هندسية أوجد المتتابة الحسابية .

١٧ متتابة حسابية مجموع الخمسة حدود الأولى منها ٥ وحدودها الأول والثاني والخامس في تتابع هندسي أوجد المتتابة الحسابية .

١٨ ثلاثة أعداد موجبة في تتابع حسابي مجموعهم ١٥ وإذا ضرب أصغرهما في ٢ وأضيف للأوسط ٧ وأضيف للأكبر ١٧ تكونت الأعداد الناتجة متتابة هندسية أوجد حدود المتتابة الحسابية .

١٩ ثلاثة أعداد في تتابع هندسي مجموعها ١٣ وإذا ضرب العدد الثاني في ٢ وضرب العدد الثالث في ٣ وكانت الأعداد الثلاثة الجديدة في تتابع حسابي أوجد هذه الأعداد .

٢٠ ثلاثة أعداد تكون متتابة هندسية مجموعها ٣٥ وإذا أضيف إلى العدد الثاني ٦ وإلى العدد الثالث ٧ صارب لأعداد الثلاثة في تتابع حسابي أوجد هذه الأعداد .

٢١ إذا قسمت الحدود الثلاثة الأولى من متتابة هندسية على ٦ ، ٤ ، ٣ على الترتيب فإن التواتج تكون في تتابع حسابي أثبت أن هاتين متتايعتين .



١٦ إذا كانت (١، ١، ١، ١، ١) متتابعة حسابية، (١، ١، ١، ١، ١) متتابعة هندسية  
فاحسب قيمة كل من ١، ١ حيث ١ ≠ ١

١٧ إذا كانت (١، ١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١، ١) كميات موجبة في تتابع هندسي  
اثبت أن: (١ + ١) (١ + ١) < ١٢

١٨ إذا كان (١، ١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١، ١) كميات موجبة في تتابع هندسي  
فاثبت أن: (١ + ١) (١ + ١) < ١٢

١٩ إذا كانت (١، ١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١، ١) كميات موجبة في تتابع حسابي فاثبت أن:  
(١) ١ < ١٢ و (٢) ١ + ١ < ١ + ١

### مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٢٠ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة،  
(١) إذا كانت (١، ١، ١، ١، ١) في تتابع هندسي فإن .....

(٢) الوسط الهندسي للأعداد: ١، ١، ١، ١، ١ هو .....

(٣) إذا كانت (١، ١) متتابعة هندسية حيث ١ = (٣) - ١ فإن الوسط الهندسي بين  
١، ١، ١، ١، ١ يساوي .....

(٤) إذا كان (١ - ١) وسط هندسي بين العددين (١ - ١) و (١ - ١) فإن ١ = .....

(٥) الوسط الهندسي للأعداد: ١، ١، ١، ١، ١ هو .....

(٦) إذا كانت (١، ١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١، ١) كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية  
فإن ١ + ١ < .....

(٧) إذا كانت ١ هي الوسط الحسابي بين ١ و ١ وكانت ١ هي الوسط الهندسي بينهما  
وكان ١ + ١ = ١ - ١ فإن ١ = ١ + ١ = .....

(٨) إذا كانت (١، ١، ١، ١، ١) و (١، ١، ١، ١، ١) كميات موجبة متتالية من متتابعة هندسية  
فإن ١ + ١ < .....









## المتسلسلات الهندسية

## الدرس

٧

سبق أن علمنا أن المتسلسلة هي مجموع حدود متتالية وتعلمنا كيفية إيجاد المتسلسلة الحسابية والآن سوف نتعرف على كيفية إيجاد المتسلسلة الهندسية

### مجموع المتسلسلة الهندسية

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود المتتالية الهندسية ويرمز لمجموع  $n$  حذا منها بالرمز  $S_n$

### مجموع $n$ حذا الأولى من متسلسلة هندسية

**أولاً** إيجاد مجموع  $n$  حذا من متسلسلة هندسية بمعلومية حدها الأول والأساس

إذا كانت  $1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$  متسلسلة هندسية حدها الأول  $1$  وأساسها  $r$  فإنه يمكن إيجاد المجموع  $S_n$  لهذه المتسلسلة كما يلي :

$$\text{من } 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = S_n \quad (1)$$

وبضرب الطرفين في  $r$  فإن :

$$r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = rS_n \quad (2)$$





وبطرح المعادلتين يكون:

$$r - r^n = 1 - r^n$$

$$\text{أي أن } r^n = (r-1) \quad (r^n - 1) = (r-1)$$

$$\therefore r^n = \frac{(r^n - 1)}{r - 1} \quad r \neq 1$$

### مثال

أوجد مجموع السبعة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ٣٢، ٦٤، ...)

### الحل

$$r = \frac{2}{1} = 2$$

$$1 = 1$$

$$\therefore r^n = \frac{(1 - 2^7) \times 1}{1 - 2} = 127$$

$$\therefore r^n = \frac{(1 - 2^7)}{1 - 2}$$

**تقريباً:** لإيجاد مجموع  $n$  حداً من متسلسلة هندسية معلومة حدها الأول  $a$

$$\text{نعلم أن } r^n = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (1)$$

وأن  $r^n = 1 - r^n$  وبضرب الطرفين في  $r$

$$\text{فنكون } r^n = r^n - 1 \quad (2)$$

$$\text{وبالتعويض من (2) في (1) فإن: } r^n = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad r \neq 1$$

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي:

### مجموع عدد محدود من حدود متتابعة هندسية

○ مجموع  $n$  حداً من حدود متتابعة هندسية حدها الأول  $a$  وأساسها  $r$  هو:

$$r^n = \frac{(r^n - 1)}{r - 1} \quad \text{حيث } r \neq 1 \quad (\text{يستخدم إذا علم عدد الحدود})$$

○ مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول  $a$  وأساسها  $r$  وحدها الأخير  $l$  هو:

$$r^n = \frac{l - a}{r - 1} \quad \text{حيث } r \neq 1 \quad (\text{يستخدم إذا علم الحد الأخير})$$





### ملاحظة هامة

- ١ يفضل استخدام الصورة  $u = \frac{(1-v)^{n+1}}{1-v}$  ،  $u = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$  إذا كان  $v < 1$  وإذا كانت  $v > 1$  نستخدم الصورة السابقة
- ٢ إذا كانت  $r = 1$  فإن  $u = 1 + 1 + 1 + \dots + 1$  (ن  $n$  حدًا)  $u = n$  ،  $u = n$

### مثال

أوجد مجموع حدود متتابعة هندسية حدها الأول  $u = 2$  وأساسها  $r = 3$  وحدها الأخير  $486$

### الحل

$$486 = u \cdot r^n = 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore u = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$$

$$\therefore u = \frac{2 - 2 \times 486}{1 - 3} = 728$$

### ١٠٠ استخدام الرمز $u$ للتجميع

يستخدم الرمز  $u$  لجمع حدود المتسلسلة بعد إيجادها بالتعويض عن قيم  $r$  لإيجاد الحد الأول والأساس وعدد الحدود أو الحد الأخير.

فمثلاً

الرمز  $u = \frac{1-v^{n+1}}{1-v}$  تعني مجموع حدود المتسلسلة من الحد الثاني إلى الحد السادس لذلك نعوض عن  $r = 2$  لإيجاد قيمة  $u$  ونوجد  $r$  وعدد الحدود ثم نوجد المجموع وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة.

### ١٠١ المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

#### تعريف

المتسلسلة الهندسية غير المنتهية (اللانهاية) هي المتسلسلة التي لها عدد لا نهائي من الحدود

فمثلاً

المتسلسلة  $2 + 4 + 8 + \dots + 486$  متسلسلة منتهية لأن لها حد أخير  
أما المتتابعة  $2 + 4 + 8 + \dots$  فهي متتابعة غير منتهية لأن ليس لها حد أخير







### مثال (٦)

متتابعة هندسية موجبة مجموع الأربعة حدود الأولى منها  $22\frac{1}{4}$  ومجموع الأربعة حدود التالية لها  $360$  فما هي المتتابعة

### الحل

$$\therefore \text{هي } \frac{(1-u^4)r}{1-u}$$

$$\textcircled{1} - \frac{(1-u^4)r}{1-u} = 22\frac{1}{4} \therefore$$

$$\therefore \text{مجموع الثمانية حدود الأولى منها } 382\frac{1}{4} = 360 + 22\frac{1}{4}$$

$$\frac{(1-u^8)r}{1-u} = 382\frac{1}{4} \therefore$$

بقسمة (٢) على (١):

② ~

$$17 = \frac{(1-u^4)r(1+u^4)}{1-u^4} \therefore \frac{382\frac{1}{4}}{22\frac{1}{4}} = \frac{1-u}{1-u^4} \times \frac{(1-u^4)r}{1-u} \therefore$$

$$17 = 1 + u^4$$

$$16 = u^4 \therefore$$

$\therefore u = 2$  هي المتتابعة موجبة

بالتعويض في (١):

$$10 \times 1 = 22\frac{1}{4} \therefore$$

$$1\frac{1}{4} = 1 \therefore$$

$\therefore$  المتتابعة هي  $(1\frac{1}{4}, 3, 6, 12, \dots)$

### مثال (٧)

متتابعة هندسية حدودها موجبة، حدها الثاني  $6$  وحدها الثالث يزيد من حدها الأول بمقداره  $9$  أوجد مجموع السبعة حدود الأولى منها

### الحل

$$\therefore u = 2$$

$$\textcircled{1} - 6 = u \therefore$$

$$1 = 1 - u \therefore$$

$$9 = 6 - 3u \therefore$$

② ~

$$9 = (1-u^2)r \therefore$$



بقسمة ② على ① :

$$\frac{9}{4} = \frac{(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} \cdot 9 = 4 - 4\sqrt{3}$$

$$9\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3}$$

$$\frac{1-\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \quad \text{مرفوض 4}$$

$$\frac{(1-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

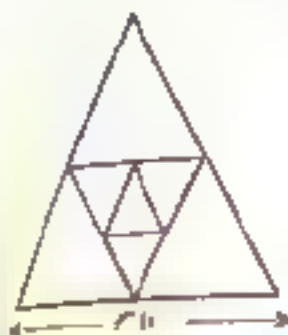
$$\frac{3}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$3\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3}$$

$$3 = 1$$

$$381 = \frac{(1-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

مثال ٨



يبين الشكل المقابل مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ١٢ سم ، رسم مثلث آخر في الداخل عن طريق توصيل النقاط التي تمثل منتصفات أضلاع المثلث الأكبر ويتم تكرار رسم المثلثات الداخلية بنفس الطريقة فأوجد لأقرب عند جميع مجموع محيطات الـ ١٠ مثلثات الأولى في هذا النمط.

الحل

$$\text{محيط المثلث الأكبر} = 12 \times 3 = 36$$

$$\text{محيط المثلث الأصغر التالي} = 6 \times 3 = 18$$

$$\text{محيط المثلث التالي للمثلث الأصغر} = 3 \times 3 = 9$$

أول النمط هو ١٢، ١٨، ٢٧، ٣٦، ٤٥، ٥٤، ٦٣، ٧٢، ٨١، ٩٠

$$\text{مجموع المحيطات} = 12 + 18 + 27 + 36 + 45 + 54 + 63 + 72 + 81 + 90$$

وهي مجموع متسلسلة هندسية

$$\frac{(1-\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}-1} = 12$$

$$12 \times \frac{(1-\frac{1}{4})}{\frac{1}{4}-1} = 12 \times 12 = 144$$

$$\text{بالتعويض عن 12} = 12 \times 12 = 144$$

ملاحظة

محيط المثلث المتساوي الأضلاع  
= 3 × طول الضلع



### ١٠ المتسلسلات المتقاربة وغير المتقاربة

المتسلسلات الهندسية غير المنتهية نوعان،

النوع الأول يكون فيها  $|r| < 1$  وهي متسلسلة لا يمكن إيجاد مجموعها

مثل ، المتسلسلة  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots$  وفي هذه الحالة تسمى متسلسلة غير متقاربة

النوع الثاني يكون فيها  $|r| > 1$  وهي متسلسلة يمكن إيجاد مجموعها

مثل ، المتتالية  $(1, 2, 4, 8, \dots)$  وفي هذه الحالة تسمى متسلسلة متقاربة

أي أن المتسلسلة الهندسية غير المنتهية هي التي لها عدد لا نهائي من الحدود وإذا كان مجموعها عددًا حقيقيًا فإنها تكون متقاربة لأن مجموعها يقترب من عدد حقيقي (ما أن لم يكن للمتسلسلة مجموع فإنها تكون غير متقاربة).

### ١١ مجموع المتسلسلة الهندسية غير المنتهية

عندما  $|r| < 1$  فإن من حدود متسلسلة هندسية يعطى بالعلاقة  $\frac{1 - r^n}{1 - r}$

وعند جمع عدد غير منته من حدودها فإن  $r^n$  يقترب من صفر عند ما تكون  $|r| < 1$

ويصبح المجموع  $\frac{1}{1 - r}$

### مثال

إذا كانت  $|r| < 1$  فإنه لا يمكن إيجاد مجموع المتتالية إلى ما لا نهاية

### مثال

في المتتالية الهندسية  $(1, 2, 4, 8, \dots)$  أوجد مجموع حدودها إلى ما لا نهاية ابتداء من الحد الأول

### الحل

$$r = \frac{2}{1} = 2 > 1 \therefore \text{لا يمكن إيجاد مجموعها}$$



### مثال ١١

متتابة هندسية لا نهائية مجموع حدودها ١٦ وأساسها  $\frac{1}{4}$  أوجد المتتابة ثم أثبت أن حدها الثالث يساوي ٣ أمثال مجموع الحدود التالية له.

### الحل

$$\frac{1}{r-1} = \infty \quad \therefore \frac{1}{\frac{1}{4}-1} = 16 \quad \therefore r = 1$$

$\therefore$  المتتابة هي  $(\dots, \frac{3}{4}, 3, 12, \dots)$

$$\textcircled{1} \quad \left[ \frac{3}{4} \right] = \frac{1}{16} \times 16 = \frac{1}{4} \times 16 = \frac{1}{r} \times 16 = 16 = 4 = 2^2$$

$\therefore$  مجموع الحدود التالية له  $= \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \dots \rightarrow \infty$

$$\textcircled{2} \quad \left[ \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{64} \times 16 \times \frac{4}{3} = \frac{\left( \frac{1}{4} \right) \times 16}{\frac{1}{4}-1} = \frac{4}{r-1} \quad \therefore$$

من  $\textcircled{1}$ ،  $\textcircled{2}$  نستنتج أن:  $4 = 3$  أمثال مجموع الحدود التالية له.

### مثال ١٢

متتابة هندسية غير منتهية مجموع عند غير محدود من حدودها ٩٦ وحدها الأول يزيد عن حدها الثاني بمقدار ٢٤ أوجد المتتابة.

### الحل

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{r-1} = 96 \quad \therefore \frac{1}{r-1} = \infty$$

$$\textcircled{2} \quad 24 = (r-1) \quad \therefore 24 = r - 1$$

من  $\textcircled{1}$ ،  $\textcircled{2}$  بالقسمة:

$$\frac{1}{4} = \frac{(r-1)}{1} \times (r-1) \quad \therefore \frac{1}{4} = \frac{(r-1)}{1} \times (r-1)$$





$$1 = 3 + \sqrt{8} - \sqrt{2} \quad \therefore$$

$$1 = \sqrt{2} \sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{2}$$

$$1 = (3 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$$

$$\frac{3}{4} = \sqrt{2} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{4} = \sqrt{2} \quad (\text{مرفوضة لأن المتتابعة غير منتهية})$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \dots)$$

مثال ١٢

إذا كان مجموع متتابعة هندسية غير منتهية  $S$  ومجموع حديها الأول والثاني يساوي 3، برهن على أنه توجد متابعتان تحققان هذين الشرطين وأوجد هما

الحل

$$3 = r + 1 \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{r-1} \quad (2)$$

$$(3)$$

$$r = (r+1) \quad (4)$$

بقسمة (4) على (1):

$$\frac{3}{4} = \frac{(r-1)}{1} \times (r+1) \quad (5)$$

$$\frac{3}{4} = r - 1 \quad (6)$$

$$\frac{1}{4} = r \quad (7)$$

$\therefore$  توجد متابعتان تحققان هذين الشرطين

$$r > 1$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots)$$

$$\frac{1}{4} = r$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (1, \frac{3}{4}, \frac{9}{16}, \dots)$$

$$\frac{3}{4} = r$$

مثال ١٣

متتابعة هندسية لا نهائية مجموع عدد غير منتهى من حدودها  $= 16$  والنسبة بين حديها الرابع إلى حديها الثالث هي  $\frac{1}{4}$  أوجد المتتابعة.

الحل

$$\frac{1}{4} = r \quad \frac{1}{4} = \frac{r^4}{r^3} \quad 16 = \frac{1}{r-1}$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (16, 4, 1, \dots)$$

$$16 = \frac{1}{\frac{1}{4}-1}$$



### تحويل الكسور العشرية الحاصلة من اقتطاع

عند تحويل بعض الكسور الاعتيادية بصورة عشرية نجد ان عمليات القسمة لا تنتهي ويوجد بعض الأرقام تتكرر باستمرار مثل  $\frac{1}{3} = 0,3333333333333333 \rightarrow \infty$  ولذلك اصطلح على ان يكتب هذا الكسر على الصورة  $0,3\overline{3}$  وتقرأ  $0,3$  دائرياً  $3$  ولقد اصطلح على وضع شرطة فوق الرقم دائري وهذه الشرطة تعني تكرار العدد إلى ما لا نهاية أو على رقمين أو ثلاثة لتعني أن الأرقام التي أسفل لشرطة تتكرر بصورة مستمرة

### مثال ١٤

ضع شكل من الأعداد الآتية في صورة عدد نصبي:

١  $0,3\overline{3}$

٢  $0,1\overline{45}$

٣  $0,4\overline{12}$

### الحل

١  $0,3\overline{3} = 0,3333333333333333 \rightarrow \infty = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$  إلى  $\infty$

$= \left( \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots \right) \frac{3}{10} =$

وما يداخل القوسين عبارة عن مجموع متتابعة هندسية لا نهاية حدها الأول ١ وأساسها  $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{3} = \frac{10}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{\frac{10}{9}} \times \frac{3}{10} = 0,3\overline{3}$

٢  $0,1\overline{45} = 0,1454545454545454 \rightarrow \infty = 0,1 + \frac{45}{1000} + \frac{45}{10000} + \dots$  إلى  $\infty$

$= \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) \frac{45}{100} + \frac{1}{10} =$

$\frac{A}{B} = \frac{145}{990} = \frac{45}{990} + \frac{1}{10} = \frac{100}{990} \times \frac{45}{100} + \frac{1}{10}$

٣  $0,4\overline{12} = 0,4121212121212121 \rightarrow \infty = 0,4 + \frac{12}{100} + \frac{12}{1000} + \dots$  إلى  $\infty$

$= \left( \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right) \frac{12}{10} + 0,4 =$

$\frac{49}{4} = \frac{10}{4} \times \frac{12}{10} + 0,4 = \frac{1}{\frac{10}{4}} \times \frac{12}{10} + 0,4$

$\frac{49}{4} = \frac{12}{4} + 0,4 = 3,1\overline{25}$



# تمرين

السؤال الثاني  
الاجابة  
الاجابة  
الاجابة

راجع معنا واختر نفسك

اجبار تراكمي

الدرجة النهائية



١ اجب عن الاسئلة الآتية

- ١ إذا كان الوسط الحسابي للعديدين ٢١، ٢١ هو ١٥ فإن  $..... = .....$   
[ ٣٥ د ٩ د ٩٥ د ١٥ ]
- ٢ الوسط الهندسي للعديدين ١٨، ٨ هو  $.....$   
[ ٧٢ د ١٤٤ د ١٢٤ د ١٢ ]
- ٣ مجموع المتسلسلة  $\sum_{k=1}^n (3 - 2^k)$  يساوي  $.....$   
[ ٨٠ د ٩٠ د ٧٢ د ٤٠ ]
- ٤ عدد الأعداد الصحيحة المحصورة بين ٩٩، ١ وكل منها يقبل على ٥ هو  $.....$   
[ ٢١ د ٢٠ د ٣٨ د ١٩ ]

٥ أدخل ستة أوساط هندسية بين  $\frac{1}{3}$ ، ٣٢

.....

٦ أوجد عدد الحدود اللازم أخذها من المتتابعة (٢٧، ٢٤، ٢١، ...) ابتداء من الحد الأول حتى يتلاشى المجموع.

.....



### ثانياً مسائل المستوى الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

- ١) مجموع الستة حدود الأولى من المتتابعة (١٠٠، ٤٤، ٢١، ...) هو .....  
 [ ٣٢ د ٣٦ د ٤٤ د ١٢٣ ]
- ٢) مجموع العشرة حدود الأولى من المتتابعة (١٠٠، ٣٤٩، ٢٧) هو .....  
 [ ٤١ د ٢٠٥ د ٤٠٥ د ٨١ ]
- ٣) متتابعة هندسية مجموع الخمسة حدود الأولى منها = ٩٣ فإذا كان أساسها = ٣ فإن حدها الأول = .....  
 [ ٢ د ٦ د ٢ د ١٢ ]
- ٤) متتابعة هندسية حدها الأول = ٤ ومجموع الثلاث حدود الأولى منها = ٢٨ فإن أساس المتتابعة هو .....  
 [ ٢٠، ٣٠ د ٣-٤٢ د ٤ د ١-٤٣ ]
- ٥) مجموع حدود المتتابعة الهندسية (١٠٠٠، ٤١٤، ٢٤٤) إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول هو .....  
 [ ٤ د ٦ د ٨ د ١٠ ]
- ٦) مجموع المتتابعة الهندسية (٣٤٩، ٢٧) إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول هو .....  
 [ ١٦٢ د ٢١ د ٤٠٥ د ٨١ ]
- ٧) مجموع حدود المتتابعة الهندسية (١٠٠٠، ٤١٤، ٢٤٤) إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول هو .....  
 [ ٧٣ د ٦٤ د ٦٣ د ٦٤ ]
- ٨) مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية = ١٩ وحدها الأول = ٤ فإن:  
 أولاً أساس المتتابعة = .....  
 ثانياً مجموع الخمسة حدود الأولى منها = .....  
 [ ٧٨١ د ٧٨١ د ٧٨١ د ٧٨١ ]

٣) أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها؟ فسر إجابتك.

- ١)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٢)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٣)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٤)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٥)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٦)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٧)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$
- ٨)  $100 + 27 + 15 + 75 + \dots$



٤٤ أي من المتسلسلات الهندسية الآتية يمكن جمعها إلى  $\infty$  ثم أوجد المجموع إن أمكن.

- ①  $(\dots, 6, 12, 24, 48, \dots)$  ②  $(\dots, 1, 2, 4, 8, 16, \dots)$   
 ③  $(\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots)$  ④  $(\dots, 2, 4, 8, 16, \dots)$

٤٥ أوجد مجموع المتسلسلات الهندسية التي فيها:

- ①  $6 = 0.6 = \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = \dots$  ②  $1 = 0.6 = \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = \dots$   
 ③  $9 = 0.9 = \frac{9}{10} = \frac{81}{100} = \dots$  ④  $12 = 0.12 = \frac{3}{25} = \frac{9}{625} = \dots$

٤٦ أوجد مجموع كل من المتتابعات الهندسية الآتية:

- ①  $(\dots, 6, 12, 24, 48, \dots)$  (إلى  $\infty$  حدود)  
 ②  $(\dots, 6, 12, 24, 48, \dots)$  (إلى  $\infty$  حدود)  
 ③  $(\dots, 6, 12, 24, 48, \dots)$  (إلى  $\infty$  حدود)

٤٧ أوجد مجموع المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

- ①  $\sum_{n=1}^{\infty} (2)^{n-1}$  ②  $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{4})^{n-1}$

٤٨ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ① مجموع الخمسة حدود الأولى من المتتابعة الهندسية التي فيها  $2 = r$  يساوي .....  
 [ ٢٢ ] [ ٣١ ] [ ٢٠ ] [ ٢٩ ]  
 ② مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة  $(\dots, 8, 4, 2, \dots)$  هو .....  
 [ ٢٠ ] [ ٢٤ ] [ ١٦ ] [ ٢٥ ]  
 ③ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$  هو ٤ فإن حدها الأول يساوي .....  
 [ ١ ] [ ٢ ] [ ٣ ] [ ٤ ]  
 ④ إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوي .....  
 [  $\frac{1}{4}$  ] [  $\frac{1}{8}$  ] [  $\frac{1}{2}$  ] [  $\frac{3}{4}$  ]  
 ⑤ متتابعة هندسية حدها الأول يساوي مجموع الحدود التالية إلى ما لا نهاية فإن أساس هذه المتتابعة يساوي .....  
 [ ٥ ] [ ٣٣ ] [ ١٥ ] [ ٦٦ ]  
 ⑥ متتابعة هندسية مجموع  $u$  حدها الأولى منها يعطى بالعلاقة  $u - 1 = 3$  فإن الحد الثالث منها يساوي .....  
 [ ١٨ ] [ ٢٣ ] [ ٥٤ ] [ ٧٧ ]



## أسئلة متنوعة الثاني

أوجد الحد العاشر من متتابعة هندسية

(1) أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, 64)$

ثم أوجد عدد حدودها

(11335)

(2) متتابعة هندسية حدها الثالث يساوي 9 وحدها السادس يساوي 243

أوجد المتتابعة ومجموع الستة حدود الأولى منها

(11335)

(3) إذا كان الحد العاشر من المتتابعة الهندسية  $(3, 6, 12, 24, \dots)$  ابتداء من حدها

الأول ليكون مجموع هذه الحدود = 381

(11)

(4) أوجد المتتابعة الهندسية التي حدها الأول = 2 وحدها الأخير = 1

ومجموع حدودها = 394

(11335)

(5) أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموعها = 1093 وحدها الأخير = 729 وأساسها = 3

(11335)

(6) متتابعة هندسية حدها الرابع = 24 وحدها السابع = 192 أوجد المتتابعة ثم

أوجد مجموع الخمسة عشر حدها الأولى منها

(11335)

(7) متتابعة هندسية حدودها موجبة فيها  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16, a_6 = 32, a_7 = 64, a_8 = 128, a_9 = 256, a_{10} = 512$

(11335)

أوجد هذه المتتابعة ومجموع الأثني عشر حدها الأولى منها

(8) متتابعة هندسية حدودها موجبة وحدها الرابع يساوي أربعة أمثال حدها السابع

(11335)

ومجموع الخمسة حدود الأولى منها يساوي 43 أوجد المتتابعة

(9) متتابعة هندسية حدودها موجبة ومجموع الحدود لأربعة الأولى منها يساوي 15

(11335)

وحدها السادس يزيد عن حدها الثاني بمقدار 9 أوجد هذه المتتابعة

(10) متتابعة هندسية فيها  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 8, a_5 = 16, a_6 = 32, a_7 = 64, a_8 = 128, a_9 = 256, a_{10} = 512$

(11)

أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية  $(a_n) = (3 \cdot 2^{n-1})$  ابتداء من حدها الرابع إلى

(11335)

حدها العاشر



[4=6]

( 16( 174742 ) ]

(16) (1977-78)]

$$\left[ \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]$$

157

193

450

$(\{E_{\alpha_1}, \dots, E_{\alpha_n}\})$

【参考文献】

أسئلة على عدد غير متناه من حدود متناهية هندسية

41

$$\left[ \left( -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 7 \right) \right]$$

١٠٨ (٢٠) **أ** واحد المتابعة الهندسية التي مجموع عدد غير مئة من حدودها يساوي ٨

[L. 4. 4. 4. 4.]



٢١ أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموع حدها الأول والثاني = ١٦ ومجموع حدودها منته من حدودها = ٢٥

٢٢ متتابعة فيها  $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 1 + u_2$  أثبت أن المتتابعة هندسية ويمكن جمعها إلى لا نهاية وأوجد هذا المجموع

٢٣ متتابعة هندسية حدها الثالث = ٣ وحدها الثامن =  $\frac{1}{81}$  أوجد المتتابعة ثم بين أنه يمكن جمع عدد غير منته من حدودها وأوجد ذلك المجموع

٢٤ متتابعة هندسية غير منتهية حدودها موجبة يزيد حدها الأول عن حدها الثاني بمقدار ١ ومجموع عدد غير منته من حدودها يساوي  $\frac{135}{4}$  أوجد هذه المتتابعة

٢٥  $(u_n)$  متتابعة هندسية فيها  $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 16, u_4 = 64$  أثبت أنه توجد متابعتان وأنه يمكن إيجاد مجموع عدد غير منته من حدود أحدهما وأوجد هذا المجموع بدءاً من حدها الأول.

٢٦  $(u_n)$  متتابعة هندسية فيها  $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 16, u_4 = 64$  أوجد المتتابعة ومجموع حدودها إلى ما لا نهاية.

٢٧  $(u_n)$  متتابعة هندسية فيها  $u_1 = 1, u_2 = 4, u_3 = 16, u_4 = 64$  أوجد المتتابعة وبين أنه يمكن جمع عدد لا نهائي من حدودها وأوجد هذا المجموع

٢٨ متتابعة هندسية لا نهائية مجموع الحدين الأول والرابع منها = ٣٨ ومجموع الحدين الثاني والثالث = ١٢ أوجد المتتابعة ثم أوجد مجموع حدودها إلى ما لا نهاية ابتداء من حدها الأول

٢٩ متتابعة هندسية غير منتهية مجموع عدد غير محدود من حدودها ابتداء من حدها الثاني = ١٢ وحدها الثاني يزيد عن حدها الثالث بمقدار ١ أوجد المتتابعة.

٣٠ مجموع حدود متتابعة هندسية (ل) ما لا نهاية يساوي أربعة أمثال لحدها الأول والثاني فإذا كان  $u_1 = 1$  أوجد المتتابعة.



**إذا كانت** (١، س، ٤) متتابعة حسابية، (١، س، ٤) متتابعة هندسية  
فاحسب قيمة كل من س، حيث س ≠ ٠ ثم بين أنه يمكن إيجاد مجموع عدد  
غير منته من حدود المتتابعة الهندسية وأوجد هذا المجموع ابتداء من حدها الأول

41) متتابعة هندسية غير منتهية جديها الأول = مجموع الحدود التالية له ما لا نهاية ومجموع جديها الأول والثاني = 9. أوجد هذه المتتابعة

متابعة هندسية لا نهائية مجموع عدد غير منته من حدودها  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$  أوجد المتتالية.

إذا كانت  $a, b, c$  في تتابع حسابي، وكانت  $a + b + c = 5$ ،  $a^2 + b^2 + c^2 = 5$ ، فإن تتابع هندسي  
 فأوجد قيمة  $\frac{a}{b}$  من  $a, b, c$  ثم أوجد مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة  
 الهندسية ( $a + b + c + \dots$ )  
 [١٦٦٠٧]



٤٥ بدأ شخص العمل في مصنع بمرتب سنوي قدره ٧٢٠٠ جنيه على أن يحصل على علاوة سنوية قدرها ٩٪ من مرتب السنة السابقة أحسب مرتبه في السنة السابعة ومجموع ما يحصل عليه في السنوات السبع الأولى.

٥١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١)  $1 + 4 + 9 + \dots + 128 = \dots$  [ ١٢٧ ك ٢٥٤ ك ١٤٠٨ ك  $\frac{256}{3}$  ]

٢)  $\frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \dots$  إلى ٦ حدود =  $\dots$

[  $\frac{23}{16}$  ك  $\frac{364}{81}$  ك  $\frac{129}{81}$  ك  $\frac{81}{121}$  ]

٣)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \dots$  [  $\frac{765}{2}$  ك ٣٨١ ك ٥٦٧ ك ٧٦٥ ]

٤)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \dots$  [ ٦٣٥١ ك ٦٠٣٠ ك ٣٠٩٠ ك ١٥٣٦ ]

٥)  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 20 = \dots$  [ ٤٠ ك ٨٠ ك ١٠٠ ك ٤٠٠ ]

٦) مجموع المتتابعة اللانهائية  $(1, 2, 4, 8, \dots)$  يساوي  $\dots$

[ ٧٨ ك ٦٤ ك ٤٨ ك ٢٤ ]

٧) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود متتابعة هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$  هو  $13\frac{1}{3}$  فإن حدها الأول يساوي  $\dots$

[ ١٦ ك ٨ ك ٩ ك ١٢ ]

٨) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التي حدها الأول ١٢ هو ٩٦ فإن أساسها يساوي  $\dots$

[  $\frac{1}{4}$  ك  $\frac{1}{2}$  ك  $\frac{7}{8}$  ك  $\frac{3}{4}$  ]

٩) متتابعة هندسية حدها الأول يساوي مجموع الحدود التالية إلى  $\infty$  فإن أساس هذه المتتابعة =  $\dots$

[  $\frac{1}{4}$  ك  $\frac{1}{3}$  ك  $\frac{1}{2}$  ك  $\frac{1}{5}$  ]

١٠) مجموع متتابعة هندسية غير منتهية حدها الأول = ١،  $u$ ،  $2 = u$ ،  $1 + u$  يساوي  $\dots$

[  $\frac{2}{3}$  ك  $\frac{3}{4}$  ك ٢ ك ٣ ]

١١)  $(u)$  متتابعة هندسية فيها  $\frac{1}{27} = \frac{1}{u}$ ،  $u = 5$  فإن مجموع عدد غير منته يساوي  $\dots$

[ ١٥ ك  $\frac{15}{4}$  ك ٤٥ ك  $\frac{60}{4}$  ]



مسائل تقبل مسووبات عيافى التكم



أذكر إحداه الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١) متتابعة هندسية مجموع  $n$  حذاً الأولى منها يعطى بالعلاقة  $u_n = 2 - 1 + 3 - 2$

[ ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ]

فإن حدها الرابع = .....

[  $\frac{7}{9}$  ،  $\frac{9}{7}$  ،  $\frac{1}{7}$  ،  $\frac{7}{1}$  ]

٢)  $\sqrt{0.7} = \dots\dots\dots$

[  $\frac{11}{33}$  ،  $\frac{11}{99}$  ،  $\frac{11}{99}$  ،  $\frac{11}{33}$  ]

٣)  $\sqrt{0.24} = \dots\dots\dots$

[  $\frac{2}{3}$  ،  $\frac{5}{9}$  ،  $\frac{1}{9}$  ،  $\frac{1}{3}$  ]

٤)  $\sqrt{0.16} = \dots\dots\dots$

٥) متتابعة هندسية مجموع مكعبات حدودها إلى  $\infty$  يساوى .....

[  $\frac{1}{1-1}$  ،  $\frac{1}{1-1}$  ،  $\frac{1}{1-1}$  ،  $\frac{1}{1-1}$  ]

٦) متتابعة هندسية لا نهائية حدها الأول يساوى ١ فإن مجموع مربعات حدودها إلى

[  $\frac{1}{1-1}$  ،  $\frac{1}{1-1}$  ،  $\frac{1}{1-1}$  ،  $\frac{1}{1-1}$  ]

٧) متسلسلة هندسية ،  $u_1 = 255$  وأساسها  $u_2 = 2$  فإن حدها الأول = .....

[ ٨ ، ٤ ، ٢ ، ١ ]

٨) متتابعة هندسية  $(2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + \dots)$  فإن مجموعها إلى ما لا نهائية

[  $\frac{27}{4}$  ، ٢٧ ، ١٨ ، ٩ ]

(حيث  $1 < 2$ )

٩) إذا كانت  $n$  مجموع  $n$  حذاً متتالية من متتابعة هندسية ، من حاصل ضرب هذه

الحدود ،  $x$  مجموع مقلوبات هذه الحدود فإن  $\left(\frac{x}{n}\right)^n = \dots\dots\dots$

[  $x^n$  ،  $x^n$  ،  $x^n$  ،  $x^n$  ]

١٠)  $s$  ،  $s$  عدداً موجبان ، أدخل بينهما وسطان هندسيان موجبان ، أدخل بين  $s$  ،  $s$

أيضاً وسطان حسابيان آخرين وكان مجموع الوسطين الهندسيين = ١٨ ومجموع

الوسطين الحسابيين = ٢٧ فإن  $s + s = \dots\dots\dots$

[ ٢١ ، ١٨ ، ٢٧ ، ٢٠ ]



٥٤) إذا كانت  $(x_n)$  متتابعة هندسية بين أن المتتابعة  $(x'_n)$  حيث  $x'_n = \log x_n$  تكون متتابعة حسابية وإذا كان  $x_n = 2 \times 5^n$  فأوجد مجموع حدود كل من المتابعتين  $(x_n)$ ،  $(x'_n)$  إلى ٢٥ حدًا.

٥٥) متتابعة هندسية أساسها  $r$  ومجموع ١٨ حدًا الأولى منها يريد يستداز ٢٩ من مجموع ١٢ حدًا الأولى منها أوجد مجموع الستة حدود الأولى منها بدلالة  $r$ .

٥٦) متتابعة هندسية فيها  $x_1 = ٢$ ،  $x_2 = ٤$ ،  $x_3 = ٨$  أوجد قيمة  $x_n$ .

٥٧) أوجد مجموع عدد لا نهائين من حدود المتتابعة الهندسية:

٥٨) متتابعة هندسية حدها الأول ١ وأساسها  $r$  وعدد حدودها  $n$ ، إذا كان مجموع حدود هذه المتتابعة  $S_n$  فأثبت أن مجموع مقلوبات هذه الحدود  $\frac{1}{1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}}$ .

٥٩) إذا كان  $x_n$  هو مجموع  $n$  حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية  $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots)$ ،  $x'_n$  مجموع  $n$  حدًا الأولى من المتتابعة الهندسية  $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \dots)$  حيث  $n$  عدد زوجي أثبت أن  $x'_n = \frac{1}{4} x_n$  ثم أوجد النسبة بين  $x_n$ ،  $x'_n$ .





## مبدأ العد

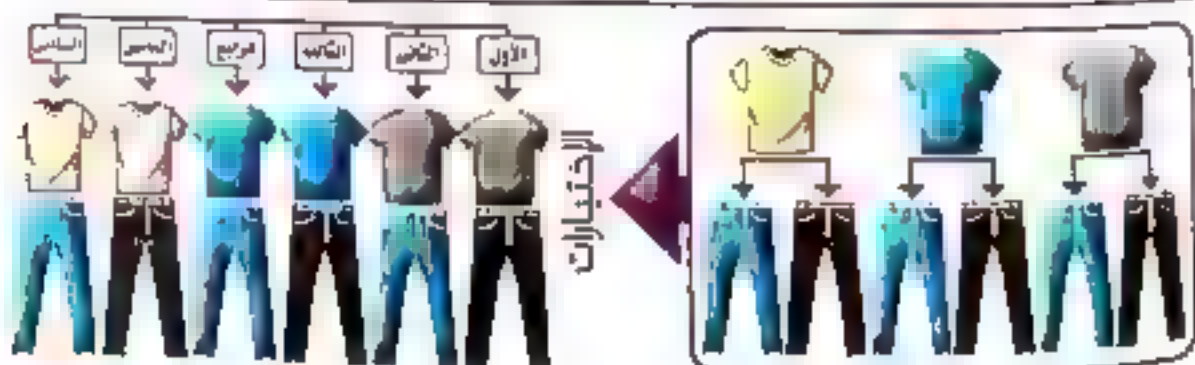
## الاحتمال

١

### ٥ مبدأ العد الأساسي

**تمهيد** كثيراً ما نحتاج إلى معرفة عدد الطرق المختلفة التي يمكن أن ترتديها مجموعة من الثياب المختلفة لإرتدائها لذلك فدراسة مبدأ العد يفيدنا في معرفة عدد الطرق،  
فمثلاً إذا كان لدى شخص ٣ تي شيرت أنوانهم هي [رمادي، أسود، أحمر]،  
٢ بطلون أنوانهم هي [أسود، أبيض] فبكم طريقة يمكن أن يظهر هذا الشخص في زى مكون من تي شيرت وبطلون.

بالفكر قليلاً نجد أن كل تي شيرت يمكن ارتدائه مع بطلون من البطلون ويمكن توضيحه بالمخطط التالي ويسمى بمخطط الشجرة البالية.





أي أن عدد طرق إختيار ٦ طرق مختلفة ويمكن معرفة ذلك أيضا بصورة سهلة وبسيطة كما يلي :

عدد طرق إختيار ٣ شيرت = ٣ طرق ، عدد طرق إختيار منطالون = ٢ طريقة .  
عدد طرق الإختيار =  $3 \times 2 = 6$  طرق .

وهي ذلك يمكن إستنتاج القاعدة التالية :

#### مبدأ قاعدة الضرب

إذا يمكن إجراء عملية بطرق مختلفة عددها  $m$  وكان لدينا في نفس الوقت عملية أخرى يمكن إجراؤها بطرق مختلفة عددها  $n$  فإن عدد طرق إجراء العمليتين معا  $= m \times n$

ويمكن تعميم القاعدة كما يلي :

إذا كان عدد طرق إجراء عمل ما يساوي  $m$  طريقة وكان عدد طرق إجراء عمل ثان  $n$  طريقة وكان عدد طرق إجراء عمل ثالث  $p$  طريقة وهكذا إلى عدد طرق عمل  $r$  هو  $m$  طريقة فإن عدد طرق إجراء هذه الأعمال معا  $= m \times p \times \dots \times r$

#### مبدأ التحقق من الشروط

مبدأ العد الشرطي هو نفس مبدأ العد وتكنيتا نبدأ أولا بالخانة المشروطة لنعرف عدد الطرق التي تحقق هذا الشرط ثم الخانة التالية التي بها شرط ونعرف عدد الطرق التي تحققها هي أيضا وهكذا .

فمثلا

إذا كان لدينا الأرقام  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ونريد تكوين عدد مكون من ٣ أرقام مختلفة فكم طريقة يمكن ذلك ؟

الخانة	الأحاد	العشرات	المئات
عدد الطرق	٣	٤	٥

ولنرد على هذا السؤال فإسنا نبدأ بالخانة المشروطة أولا وهي الخانة اليسرى خانة

المئات لأنه لا يمكن استخدام الصفر جهة اليسار وإلا أصبح العدد مكون من رقمين فقط لذلك فإنه يمكن وضع ٥ أرقام فقط في هذه الخانة .  
عدد طرق إختيار الرقم في خانة المئات = ٥

وبعد إختيار قيمة في خانة المئات يتبقى ٥ أرقام فقط نختار من بينهم لخانة العشرات .  
عدد طرق إختيار الرقم في خانة العشرات = ٥ وبعد إختيار رقم في خانة المئات والرقم في خانة العشرات يتبقى ٣ أعداد فقط نختار من بينهم لخانة الأحاد





١. عدد طرق اختيار الرقم على خانة الأحاد = ٣

٢. عدد الطرق الكلية =  $3 \times 4 \times 4 = 48$  طريقة

### مثال

مول تحارى له ثلاثة أبواب بكم طريقة يمكن لشخص الدخول والخروج من المول بشرط أن لا يسمح له بالخروج من أى باب دخل منه ؟

### الحل

عدد طرق الدخول إلى المول = ٣ طرق ،

عدد طرق لخروج من المول = ٢ طريقة

∴ عدد طرق الاختيار =  $2 \times 3 = 6$  طرق



الدخول	الخروج	الاختيار
أ	ب	بأ
أ	ج	جأ
ب	أ	أب
ب	ج	بج
ج	أ	أج
ج	ب	بج

### مثال

كم عددًا مكونًا من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الأحاد من العناصر {٢، ٤، ٦}

ورقم العشرات من لعناصر {٣، ٥} ورقم المئات من العناصر {١، ٤، ٧}

### الحل

خانة المئات	خانة العشرات	خانة الأحاد
١	٣	٢
٤	٣	٢
٧	٣	٢
١	٥	٢
٤	٥	٢
٧	٥	٢
١	٣	٤
٤	٣	٤
٧	٣	٤
١	٥	٤
٤	٥	٤
٧	٥	٤





من الشجرة البيانية،

عدد طرق الاختيار = عدد طرق رقم الاحد  $\times$  عدد طرق رقم العشرات  $\times$  عدد طرق رقم المئات  
 $= 2 \times 2 \times 3 = 12$  طريقة

### مثال ٣

ثلاثة أشخاص وصلوا إلى محافظة الأقصر فيها أربعة فنادق فما عدد الطرق التي  
 بها يمكن نزول كل شخص في أحد هذه الفنادق وحده.

### الحل

الشخص الأول يستطيع أن يختار أحد أربعة فنادق

$\therefore$  عدد طرق اختيار الشخص الأول = ٤ طرق

وعندما يختار فندقًا معينًا فإن الشخص الثاني لا يجد أمامه سوى أن يختار فندقًا من  
 بين الثلاثة الباقية

$\therefore$  عدد طرق اختيار الشخص الثاني = ٣ طرق

وبالتالي عدد طرق اختيار الشخص الثالث = ٢ طريقة

$\therefore$  عدد الطرق المختلفة =  $4 \times 3 \times 2 = 24$  طريقة

### مثال ٤

دخل يوسف مطعم لتقديم الوجبات الجاهزة فكان المطعم يقدم ٥ أنواع من الوجبات  
 الساخنة و ٣ أنواع من السلطات و ٤ أنواع من المشروبات **كم** عدد الوجبات التي يمكن  
 أن يقدمها يوميًا هذا المطعم على أن تشمل الوجبة نوعًا واحدًا من الوجبات الساخنة  
 والسلطات والمشروبات؟

### الحل

عدد طرق الاختيار =  $5 \times 3 \times 4 = 60$  طريقة





## مثال

نسيت رحاب الرقم الخاص بها لدخول الإنترنت وكان لديها المعلومات التالية :

١) يكون العدد من الأرقام ٦٤٥٤٤٣٤٢

٢) العدد مكون من خمسة أرقام .

٣) العدد زوجي .

فما هي عدد الخيارات الممكنة أمام رحاب لاستعادة رقمها ؟ إذا علم أن الأرقام لا تتكرر

## الحل

(لاحظ أن الأرقام محدودة ولا تتكرر) عدد خانات العدد خمسة :

الخانة الأولى	الخانة الثانية	الخانة الثالثة	الخانة الرابعة	الخانة الخامسة
٢	٤	٣	٢	١
↓	↓			
عدد الزوجة {٢,٤,٦,٨}	سواء أن تم اختيار رقم من ٥ أرقام	وهكذا ...		

نبدأ بخانة الأحاد المشروطة (العدد زوجي ٦٤٤٤٢)

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الأولى = ٣ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الثانية = ٤ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الثالثة = ٣ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الرابعة = ٢ طرق

عدد طرق اختيار الرقم في الخانة الخامسة = ١ طرق

عدد الطرق (الإختيارات) =  $٣ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٧٢$  طريقة



### مثال ٦

كم عددًا من خمس خانة تبدأ بعدد فردي يمكن تكوينها من الأرقام  
٦، ٤، ٥، ٤، ٤، ٣، ٢، ١ دون تكرار

### الحل

تبدأ بخانة الأحاد المشروطة (٥، ٣، ١) لأن العدد فردي  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الأحاد (الأولى) = ٣ طرق  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات (الثانية) = ٥ طرق  
وهي باقي الأرقام بعد الاختيار الأول (٥ أرقام)  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات = ٤ طرق  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الآلاف = ٣ طرق  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات - ٢ طرق  
∴ عدد الطرق =  $3 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 360$  طريقة

### مثال ٧

بكم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة من الأرقام {٧، ٤، ٤، ٣، ٢} بحيث يكون رقم العشرات زوجيًا.

### الحل

تبدأ بالخانة المشروطة وهي خانة العشرات  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة العشرات زوجيًا {٢، ٤} = ٢ طرق  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الآحاد = ٣ طرق  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة المئات = ٢ طرق  
عدد طرق اختيار الرقم في خانة الألوف = ١ طرق  
∴ عدد طرق الاختيار =  $1 \times 2 \times 3 \times 2 = 12$  طريقة



# تمرين

التمرين رقم ١

التمرين رقم ١  
التمرين رقم ١  
التمرين رقم ١

أولاً اجمع معاً وأختم نفسك

اختار تراكمي ٧

الدرجة المعطاة

التمرين رقم ١



١) أجب عن الأسئلة الآتية :

١) عدداً وسطهما الهندسي = ٥ فإن حاصل ضربهما = .....

[ ٦ ٤ ٢٥ ٥ ٧ ]

٢) الحد العام لمتتابعة الأعداد الزوجية (٢، ٤، ٦، ٨، ...) هو  $u_n = \dots$

[ ٢٠ ٥ ٣ + ٥ ٤ ٢٠ ]

٣) متتابعة حسابية فيها  $u_n = u_{n-1} + ٣$  فإن أساس المتتابعة يساوي .....

[ ٣ - ١ ١ - ١ ٣ - ]

٤) إذا كان الوسط الهندسي لعددتين ٤٩ من هو ١٥ فإن من = .....

[ ٦ ٢١ ٢٥ ٢٥ - ]

٥) أوجد مجموع حدود المتتابعة الهندسية  $(u_n) = (٣ - ٤)^n$   
(ابتداء من حدها الرابع إلى حدها العاشر).

٦) أوجد المتتابعة الهندسية التي مجموع عدد غير منته من حدودها يساوي ١٨، حدها الثاني يساوي ١٢



### ثالثاً مسائل المستوى الأول

٢ جامعة لها ثلاثة أبواب بكم طريقة يمكن لأحد الطلبة الدخول والخروج من الجامعة بشرط أن لا يسمح له بالخروج من أي باب دخل منه ؟

٣ كم عدد الاختيارات التي يمكن لخالد أن يتناول وجبة من بين ثلاث وجبات (كبدة ، دجاج ، سمك) ومشروباً واحداً من مشروبات (برتقال ، ليمون ، مانجو) ؟

٤ مطعم يقدم ٩ أنواع من الفطائر ، ٤ أنواع من السلطات ، ٣ أنواع من المشروبات كم عدد الوجبات التي يمكن أن يقدمها يوميًا على أن تشمل الوجبة نوعاً واحداً من كل من الفطائر والسلطات والمشروبات.

٥ كم عدداً مكوناً من ثلاثة أرقام بحيث يكون رقم الأحاد من العناصر {٢٤١} ورقم العشرات من العناصر {٤٤٣} ورقم المئات من العناصر {٧٤٦٤٥} ؟

### ثالثاً مسائل المستوى الثاني

٦ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ عدد طرق جلوس ٣ أشخاص على ثلاثة مقاعد في صف = .....

[ ١ ٤ ٦ ٤ ٣ ٤ ١ ]

٢ عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام من الأرقام {٥٤٤٣٤٧٦١} إذا سمح بالتكرار

يساوي .....

[ ٣٥ ٤ ٢٥ ٤ ١٥ ٤ ٣٥ ]

٣ عدد طرق تكوين عدد من ثلاثة أرقام من الأرقام {٥٤٤٣٤٧٦١} بدون تكرار

يساوي .....

[ ٣٥ ٤ ٢٥ ٤ ١٥ ٤ ٣٥ ]

٧ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه .

١ عدد طرق جلوس ٤ طلاب على أربعة مقاعد في صف يساوي .....

[ ١ ٤ ٤ + ٤ ٤ ٤ × ٤ ٤ ٤ × ٤ ]

٢ عدد طرق نزول ٣ أشخاص في أربعة فنادق حيث ينزل كل شخص في أحد هذه الفنادق

وعدم يساوي .....

[ ٣ × ٤ ٤ ٢ × ٤ ٤ ١ × ٢ × ٣ ٤ ٢ × ٤ ]



٣) عند الأعداد المكونة من رقمين مختلفين مأخوذة من الأرقام {٢٠٠، ٢٠٥} يساوى .....  
 [١×٣ & ٣×٣ & ٢×٤ & ٢×٣]

٤) عدد الأعداد المكونة من أربعة خانات مختلفة مأخوذة من الأرقام {٧، ٦، ٥، ٤، ٣} تساوى .....  
 [٣×٥×٦×٧ & ٦×٥×١×٣ & ٢×٣×٤×٥ & ١×٢×٣×٤]

٥) عدد الأعداد المكونة من أربعة خانات مختلفة تبدأ بكل منها بالرقم ٦ مأخوذة من الأرقام {٧، ٦، ٥، ٤، ٣} تساوى .....  
 [٢×٣×١ & ٣×٤×٥×٦ & ٦×٢×٣×٤ & ٢×٣×٤×١]

٦) عدد الأعداد الفردية المكونة من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام {٨، ٦، ٣، ٢} تساوى .....  
 [٢×٣×١ & ٢×٢×٤ & ٣×٣×٤ & ٣×٦×٨]

٨) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٥، ٣، ٢} [١٧]

٩) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاثة أرقام مأخوذة من العناصر {٤، ٣، ٢، ١} [١٤]

١٠) كم عددًا من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ٥، ٤، ٣، ٢، ١ دون تكرار الرقم ؟ [٣٠]

١١) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من العناصر {٨، ٦، ٣، ٢} بحيث يكون رقم الأحاد ؟ [١]

١٢) كم عددًا من خمس خانات تبدأ بعدد فردي يمكن تكوينها من الأرقام ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١ دون تكرار. [٣١]

١٣) كم عددًا من خمس أرقام تبدأ بالرقم ١ وتنتهي بالرقم ٥ من الأرقام {٥، ٤، ٣، ٢، ١} دون تكرار. [١]

١٤) بكم طريقة يمكن تكوين كلمة مكونة من ثلاثة أحرف من كلمة شجرة ؟ [٢٤]

١٥) بكم طريقة يمكن أخذ صورة تذكارية لعائلة مكونة من أب وأم وثلاثة أطفال يقفون معًا في صف واحد ؟ [٧٠]



١٦) كم طريقة لطفل لديه ٥ مجسمات هي مكعبة ، مخروط ، مكعب ، أسطوانة ، قوس لترتيب هذه المجسمات في صف واحد.

[٢٠]

١٧) تبدأ لوحات ترخيص السيارات في إحدى المحافظات بثلاثة من الحروف الأبجدية يتبعها ثلاثة أرقام غير الصفر كم عدد اللوحات التي يمكن الحصول عليها ؟ بفرض أنه لا يوجد تكرار لأي من الحروف أو الأرقام في أي من لوحات التراخيص .

[١٩٠٠٠]

١٨) بطاقة الصرف الآلي (فيزا كارت) تحتوي على أربعة أرقام من الأرقام ٠ إلى ٩ كم بطاقة مختلفة يمكن إنتاجها ؟

[١٠٠]

١٩) كم طريقة يمكن أن يختار طائب مقرين دراسيين الأول في الهندسة والثاني في الجبر إذا كان مطروحاً له ٩ مقررات في الهندسة ، ٣ مقررات في الجبر ؟

[١٨]

٢٠) كم عدد الأعداد المكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة مأخوذة من الأرقام { ٩ ٨ ٥ ٤ ٣ } بحيث تكون أصغر من ٩٠٠ ؟

[١٨]

٢١) إذا علمت أن مجموعة أرقام شيكات المحمول في إحدى الدول تتكون من إحدى عشر رقم فإننا نعلم الرقم (٢٥) ثابت من اليسار أوجد أكبر عدد من الخطوط يمكن أن تحملها شيكات المحمول ؟

[١٠٠٠]

### أرقام مسائل تقيس مستهبات عليا في التفكير

٢٢) كم عددًا يمكن تكوينه من أربعة أرقام مختلفة وتحتوي على الرقمين ٨٤٠ ؟

[١٨]

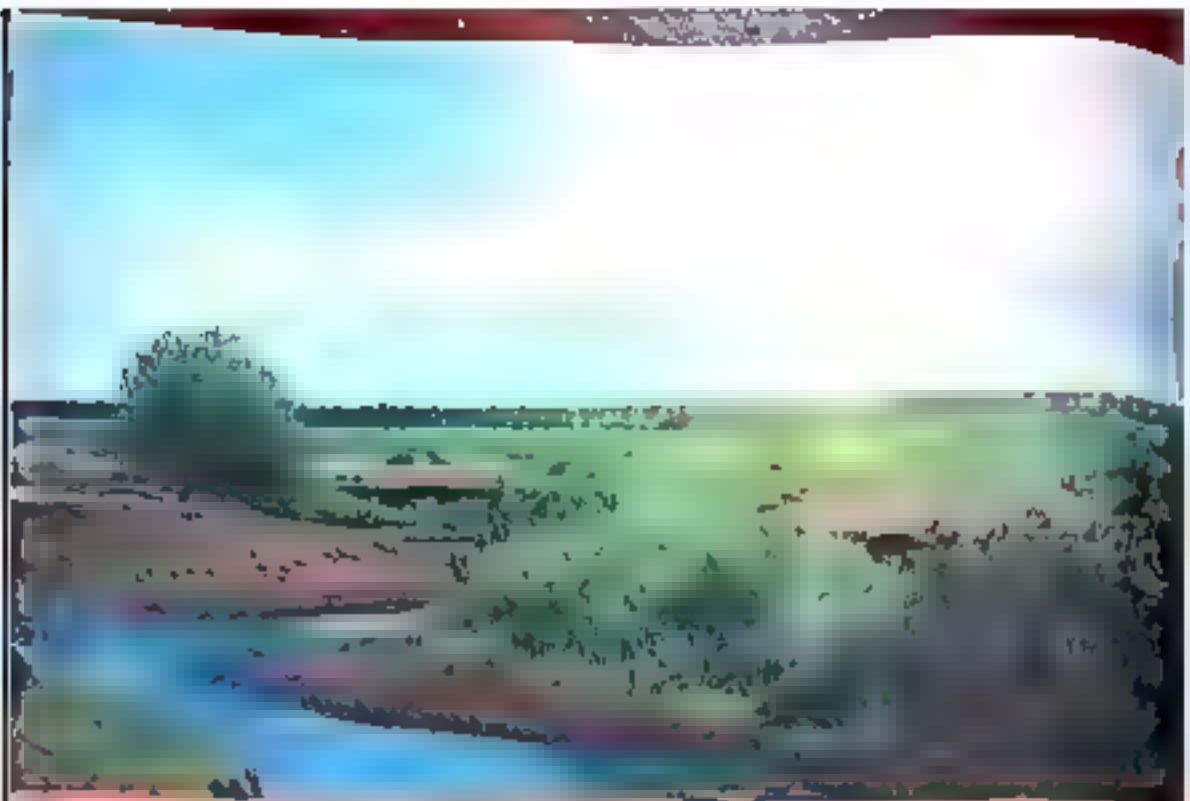
٢٣) كم طريقة يمكن تكوين عدد من خمسة أرقام مختلفة من الأرقام { ١ ٤ ٥ ٤ ٤ ٣ ٤ ٢ ٤ ١ } بحيث لا يتجاوز عددين زوجيين ولا عددين فرديين ؟

[١٧]

٢٤) كم طريقة يمكن تكوين عدد مكون من أربعة أرقام من ٠ إلى ٩ وتكون محصورة بين ١٠٠ و ٧٠٠٠ ولا يكون عددًا فرديًا ؟

[٣٩٩]





## مضروب العدد - التباديل

الجزء

٢

### مضروب العدد

إذا ضربنا عدد صحيح في جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه فإن هذه العملية تسمى «مضروب العدد»

فمثلاً

إذا ضربنا العدد ٤ في جميع الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر منه كالتالي :

$1 \times 2 \times 3 \times 4$  فإن هذه العملية تسمى مضروب ٤ وتكتب [4]

وبالتالي فإن  $3 = 1 \times 2 \times 3$  ،  $5 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$  ،  $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$

يستخدم الآلة الحاسبة تكتب [2] كالتالي  $[3] [Shift] [x^1] [=]$

ومن ذلك يمكن تعريف المضروب كما يلي :

### المضروب

مضروب العدد الصحيح الموجب  $n$  يكتب على الصورة [n] ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة لـ  $n$  الأصغر من أو تساوي  $n$  حيث :

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \quad \text{حيث } n \geq 0$$



٢ أكبر عوامل إله هوى وأصغرهم هو الواحد.



### مثال ٢

إذا كان:  $\frac{1}{u} = 21$  فما قيمة  $u$  ؟

### الحل

$$\frac{1}{u} = 21 \Rightarrow 1 \times 1 \times 3 \times 7 = 21$$

$$\therefore \frac{1}{u} = 21$$

$$u = \frac{1}{21}$$

المعرفة العدد الذي مضروب  
21 نقسم على 1 ثم على  
2 ثم على 3 وهكذا إلى أن  
نصل إلى ناتج القسمة = 1

1	21
2	21
3	12
4	4

### مثال ٣

إذا كان:  $\frac{1}{u} + \frac{2}{u} - \frac{1}{u} = 42$  أوجد قيمة  $u$

### الحل

$$\frac{1}{u} = \frac{2+u}{u}$$

$$42 = \frac{u(1+u)(2+u)}{u}$$

$$u = 42 - 2 + u + 1 \Rightarrow$$

$$u = (40 - u)(1 + u) \therefore$$

$$u = 40$$

$$42 = (1+u)(2+u)$$

$$u = 40 - u + 2 + u$$

$$u = 40 - u + 2 + u$$

### مثال ٤

إذا كان:  $\frac{1}{u} = \frac{1}{2-u} + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{u}$  فما أوجد قيمة  $u$

### الحل

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{2-u} + \frac{1}{(2-u)(1-u)} + \frac{1}{(2-u)(1-u)u}$$

$$\frac{1}{u} = \left(1 + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{(1-u)u}\right) \frac{1}{2-u}$$

$$\frac{1}{u} = \left(\frac{(1-u)u + u + 1}{(1-u)u}\right) \frac{1}{2-u}$$



$$\frac{26}{u} = \left( \frac{u - 2u + u + 1}{(1-u)u} \right) \frac{1}{2-u}$$

$$\frac{26}{u} = \left( \frac{1+2u}{(1-u)u} \right) \frac{1}{2-u}$$

$$\frac{26}{u} = \frac{1+2u}{(2-u)(1-u)u}$$

$$\frac{26}{u} = \frac{1+2u}{u}$$

$$26 = 1 + 2u$$

(لأن  $u \neq 0$ )

$$25 = 2u$$

$$u = \frac{25}{2}$$

مثال

أوجد قيمة  $u$

إذا كان:  $\frac{u}{4-u} = \frac{5-u}{4}$

الحل

$$u = 4 - u$$

$$u = 2$$

$$5u = (5-u)(4-u)$$

$$u = 1 - u$$

النتيجة

إذا كان لدى أحد محلات الأزياء 4 ألوان لتعديل معين من القمصان وأراد ثلاثة أشخاص اختيار ثلاثة منها بألوان مختلفة.

فيكم طريقة يمكن اختيار هذه الألوان الثلاثة معًا ؟

بالطبع فإن الشخص الأول يمكنه اختيار أي لون من الستة ألوان أي أن له 6 طرق للاختيار

أما الشخص الثاني فيختار بعد لون من الخمسة ألوان الباقية أي أن له 5 طرق للاختيار

أما الشخص الثالث فيختار بعدهما لون من الأربعة ألوان الباقية أي أن له 4 طرق للاختيار

فيكون عدد طرق اختيار الألوان الثلاثة معًا  $6 \times 5 \times 4 = 120$  طريقة

وكل ثلاثة ألوان تم اختيارهم معًا يسمى بتبديل الستة ألوان مأخوذة ثلاثة ثلاثة في

كل مرة ويرمز لذلك بالرمز  ${}^6P_3$  ونقرأ «ستة لام ثلاثة».



أولاً  $3! = 1 \times 2 \times 3$  تكتب بالآلة الحاسبة كما لاتي :

$$[3] [X] [2] [=] \quad [6] [X] [3] [=]$$

أولاً  $3!$  تعني حاصل ضرب عدة عوامل عددها 3 تبدأ بالعدد 3 وحاصل عامل ينقص واحد عن سابقه.

كذلك  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$  عند العوامل 4 ويبدأ بالعدد 4 والعدد الذي قبله 3

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  نصرب العدد 5 بالعدد الذي قبله وهكذا إلى 1 عوامل مما سبق نستنتج أن كل طريقة من طرق الاختيار تسمى تبديلة وتعرف كما يلي :

### التبديلة

التبديلة لعدد من الأشياء هي وضعها في ترتيب معين.

ويمكن صياغتها رياضياً بالتعرف التالي :

### تعريف

يرمز لعدد تبديل  $n$  من العناصر الصغيرة مأخوذة من  $r$  العناصر في كل مرة بالرمز

$${}^n_r P = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{حيث } n \geq r$$

حيث  $n \geq r$  ،  $n \geq 0$  ،  $r \geq 0$  ،  $n, r \in \mathbb{N}$

أولاً الرمز  ${}^n_r P$  ويقراء «  $n$  ل  $r$  » يدل على عدد تبديل «  $n$  » من الأشياء المختلفة مأخوذة منها «  $r$  » من الأشياء في كل مرة حيث  $n \geq r$

أولاً  ${}^n_r P =$  عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من  $n$  من الأشياء بحيث يحتوي كل ترتيب على  $r$  من هذه الأشياء

فمثلاً  ${}^5_3 P =$  عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من 5 أشياء بحيث يحتوي كل ترتيب على 3 من هذه الأشياء في كل مرة

أولاً  ${}^5_3 P = 5 \times 4 \times 3$  (لاحظ أن العدد الأخير =  $3 = (5 - 3 + 1)$ )  
 ${}^5_1 P =$  عدد الترتيبات التي يمكن تكوينها من 5 أشياء بحيث يحتوي كل ترتيب على 1 من هذه الأشياء في كل مرة.



أو أن  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  (لاحظ أن العدد الأخير  $= (1+2-1) = 2$ )  
أو أن العامل الأخير في حاصل الضرب هو  $(1+2-1) = 2$

أي يزيد واحد عن الفرق بين  $2$  و  $1$

**لاحظ أن**  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  وإذا ضربنا البسط والمقام في  $1 \times 2 \times 3$

فإن  $24 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3}$  وحيث أن  $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

فإن  $24 = \frac{24}{1}$  و  $1 \times 2 \times 3 = 6$

أو بصورة أخرى  $24 = \frac{24}{4-2}$

وبنفس الطريقة فإن  $24 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2}{1 \times 2} = \frac{24}{2}$

فما سبق نستنتج أن  $\frac{u}{v-u} = \frac{u}{v}$  حيث  $u \neq 0$  ،  $v \neq 0$  ،  $v \neq u$

**لاحظ أن**  $u$  له صورتان فإذا كانت  $v$  معلومة يفضل استخدام الصورة

$$u = (1-u)(1-u) \dots (2-u)(1-u)(1-u)$$

فمثلاً  $u = (1-u)$

أما إذا كانت  $v$  مجهولة فيفضل استخدام الصورة  $\frac{u}{v-u} = \frac{u}{v}$

فمثلاً  $\frac{4}{v-4} = \frac{4}{v}$  ومنها  $1 = \frac{u}{v-u} = \frac{u}{v}$

أو أن  $1 = \frac{u}{v}$

**ملاحظات** ١  $u = \frac{u}{v}$  ٢  $\frac{u}{v} = u$



ويمشي تلخيص قوائم التباديل فيما يلي:

### ملخص قوانين التباديل

- ١  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$  ويستخدم إذا كانت  $n$  معلومة حيث  $n \geq 1$
- ٢  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$  عدد العوامل والحد الأخير = 1
- ٣  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots$  ويستخدم غالباً لاختصار المضروب.
- ٤  $n! = \frac{n!}{n}$  ويستخدم إذا كانت  $n$  مجهولة غالباً
- ٥  $n! = n! \times 1$  ،  $n! = n! \times 1$  ،  $n! = n!$

### ملاحظات هامة

- ١ يمكن أن تستعمل في المسائل اللفظية عن التباديل من خلال الجمل التالية:
- ٢ إختيار لجنة للقيام بأعمال مختلفة (التحديد وظيفة رئيس ونائب)
- ٣ الإختيار على التتالي (واحد وراء آخر)
- ٤ غير مسجوع بالتكرار (التباديل الترتيب فيها هام)
- ٥ المسحب بدون إرجاع (بدون إحتلال)
- ٦ توزيع عناصر على أماكن بحيث يشغل كل عنصر مكان واحد في نفس الوقت.

### مثال

أوجد قيمة  $10! - 9! - 8!$

### الحل

- ١  $10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
- ٢  $9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
- ٣  $8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$



### استخدام الحاسبة

يرمز للتبادل بالحاسبة العملية بالرمز  $nPr$  ونستخدم فيها المفاتيح  $\boxed{\text{Shift}}$   $\boxed{\times}$  ونحسب قيمة  $nPr$  بالحاسبة نضغط بالتتابع على المفاتيح الآتية:

$$\boxed{9} \boxed{\text{Shift}} \boxed{\times} \boxed{4} \boxed{=} \boxed{3024}$$

### مثال ٢

فاوجد:  $4 - 5$

إذا كان  ${}^nP_6 = 720$

### الحل

٥	٧٢٠
٤	٧٢٠
٣	٧٢
٢	٦
١	٦
١	١

نبدأ بقسمة العدد ٧٢٠ على ٦ ثم نقسم العدد الناتج على ٥

ثم نقسم العدد الناتج على ٤ ثم نقسم العدد الناتج على ٣

ثم نقسم العدد الناتج على ٢ حتى نصل إلى العدد ١

$$\therefore \text{العدد } 720 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\therefore 5 - 4 = 1$$

$$\therefore {}^nP_6 = {}^nP_6$$

$$\therefore 1 - 5 = 4 - 1 = 1$$

### مثال ٣

إذا كان  ${}^nP_6 = 720$ ،  ${}^nP_4 = 24$ ،  ${}^nP_2 = 2$  فاوجد  $n$

### الحل

٥	٧٢٠
٤	٢٤
٣	٢
١	١

من المفترض وجود ٣ أعداد متتالية حاصل ضربهم ٧٢٠

حيث أن العدد رقم أحاده «صفر» فلنبدأ القسمة

بالرقم «٥» ثم نحاول العدد التالي له «٦» وهكذا ويمكن

تقسيمه بأي صورة لإيجاد ٣ أعداد متتالية حاصل

ضربهم يساوي ٧٢٠

$$\therefore {}^nP_6 = 5 \times 6 \times 7$$



$$\begin{array}{r|l} 10 & 720 \\ 9 & 72 \\ 8 & 8 \\ & 1 \end{array}$$

$$7 = 2 \therefore$$

$$10 = 5 + 2 \therefore$$

$$2 = 5 \therefore$$

$$3^7 = 3^{1+2+2}$$

$$8 \times 9 \times 10 = 3^{1+2+2}$$

$$3^{10} = 3^{1+2+2+2+2}$$

$$4 = 5 + 7$$

مثال

إذا كان:  $36 = 3^u + 3^v + 3^w$  فأوجد قيمة:  $1-u$  :  $1+u$

الحل

$$36 = (1-u)u + u + 1 \therefore$$

$$0 = 25 - 2u \therefore$$

$$0 = u \therefore$$

$$30 = \frac{10 \times 1}{1} = 1 \quad 1 = 1-u : 1+u \therefore$$

$$36 = 3^u + 3^u + 3^u$$

$$0 = 36 - u - 2u + u + 1$$

$$25 = 2u \therefore$$

مثال

إذا كان:  $3^u 10 = 3^{1+u}$  فأوجد قيمة:  $u$

الحل

$$(2-u)(1-u)u10 = (1-u)(1-u)(u)(1+u) \therefore$$

$$9 = u \therefore$$

$$3^u 10 = 3^{1+u}$$

$$10 = 1+u$$

حل آخر

$$3^u 10 = 3^{1+u}$$

$$\frac{u|10}{3-u} = \frac{1+u}{3-u} \therefore$$

$$10 = 1+u \therefore$$

$$\frac{u}{3-u} 10 = \frac{1+u}{3-u} \therefore$$

$$u10 = u(1+u) \therefore$$

$$9 = u \therefore$$



### ١٠ الترتيب في صف والترتيب في دائرة

**أولاً:** لترتيب  $n$  من العناصر في صف واحد فإن:

● عدد طرق اختيار العنصر في المكان الأول  $= n$

● عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثاني  $= (n - 1)$

**لاحظ أن:** عدد الطرق لتقص طريقة واحدة بعد اختيار العنصر في المكان الأول.

● عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثالث  $= (n - 2)$  ... وهكذا

إلى أن تصل إلى آخر عنصر والذي يكون له طريقة واحدة

أي أن عدد طرق اختيار العنصر الأخير  $= 1$

أي  $n$  عدد الطرق التي ترتب بها  $n$  من العناصر في صف واحد

$$n = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1 = n!$$

أي أن عدد طرق ترتيب  $n$  من العناصر في صف واحد  $= n!$

**ثانياً:** لترتيب  $n$  من العناصر في دائرة فإن:

الدائرة ليس بها نقطة بداية أو نقطة نهاية لذلك فلي يبدأ الترتيب إلا بعد وضع العنصر الأول في أي مكان على الدائرة وبعد ذلك يكون للعنصر الأول طريقة واحدة فقط وهي وضع في أي مكان والذي بمجرد وضعه في هذا المكان فيعتبر تحدد به بداية الدائرة ونهايتها بالآخرين ثم تبدأ ترتيب العناصر الأخرى ويكون:

عدد طرق اختيار العنصر في المكان الأول  $= 1$

عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثاني  $= (n - 1)$

عدد طرق اختيار العنصر في المكان الثالث  $= (n - 2)$  ... وهكذا

إلى أن تصل إلى آخر عنصر الذي يكون له طريقة واحدة

أي أن عدد طرق اختيار العنصر الأخير  $= 1$

أي أن عدد الطرق التي ترتب بها  $n$  من العناصر على دائرة

$$= 1 \times (n-1)(n-2) \times \dots \times 1 = (n-1)!$$

أي أن عدد طرق ترتيب  $n$  من العناصر على دائرة  $= (n-1)!$



### مثال ٦

بعض طريقة يمكن ترتيب ٥ أشخاص في ٥ مقاعد بحيث يجلسون :  
 ١ في صف واحد  
 ٢ على شكل دائرة مستديرة.

### الحل

١ يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسوا في صف واحد بعدة طرق عندها

$$= 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ طريقة}$$

٢ يمكن للأشخاص الخمسة أن يجلسوا على شكل دائرة بعدة طرق عندها

$$= \frac{5!}{5} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{5} = 24 \text{ طريقة}$$

### مثال ٧

أوجد عدد الطرق المختلفة لجلوس ٦ طلاب على ٦ مقاعد في صف واحد

### الحل

نبدأ ٦ مقاعد يراد اختيار ١ منها في كل مرة

$$\therefore \text{عدد الطرق} = 6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

### مثال ٨

أوجد عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها عند أخذ ٤ حروف من كلمة «المدرسة»

### الحل

نبدأ ٧ حروف من كلمة «المدرسة» يراد اختيار ٤ حروف مختلفة في كل مرة

$$\therefore \text{عدد الطرق} = 7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$$



### مثال

مجلس إدارة شركة يتألف من ثمانية أعضاء بكم طريقة يمكن أن تختار منهم رئيساً وأميناً ومحاسباً ؟

### الحل

لاختيار رئيس للشركة أمامنا ٨ اختيارات  
لاختيار أميناً للشركة أمامنا ٧ اختيارات  
لاختيار محاسباً للشركة أمامنا ٦ اختيارات  
أي أننا أجرينا تبديلة على ٨ أشخاص ما خودة ثلاثة  
∴ عدد الطرق =  $8 \times 7 \times 6 = 336$

### مثال

كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام ٧٤٦٤٥٤٤٣ يتكون من أربع خانات مختلفة ؟

### الحل

الخانة	الأحاد	العشرات	المئات	الألف
عدد الاختيارات	٥	٤	٣	٢

∴ عدد الطرق =  $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$  عدداً



# تمرين

عشر أسئلة من أسئلة الامتحان

الأسئلة التي فيها علامة نجمة (\*) هي أسئلة اختيارية

أولاً اجمع معاً وأختبر نفسك

اختبار تراكمي ٨١

الدرجة النهائية ١٠



١) أجب عن الأسئلة الآتية :

- ١) المتتابعة التي قاعدتها  $u_n = 2n + 1$  تكون متتابعة .....  
(تزايدية ، تناقصية ، ثابتة ، ثابتة)
- ٢) مجموع المتسلسلة  $\sum_{n=1}^{\infty} (2 - 1/n)$  يساوي .....  
[ ٧٢ ، ٨٠ ، ٩٦ ، ٩٩ ]
- ٣) متتابعة هندسية مجموع  $u$  حدّها الأول منها يعطى بالعلاقة  $u = 2 - 1/n$   
فإن الحد السابع منها يساوي .....  
[ ١٥ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ١٩٤ ]
- ٤) إذا كان مجموع عدد غير منته من حدود المتتابعة الهندسية التي حدّها الأول ٤٨ هو ٧٢ فإن أساسها يساوي .....  
[ ١/٤ ، ١/٣ ، ١/٢ ، ٣/٤ ]

٥) كم عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام مختلفة مأخوذة من لعناصر {٨، ٦، ٤، ٣، ٢} ؟

٦) عدنان موجب وسطحها الحسائي يساوي ١٠ ووسطها الهندسي يساوي ٨  
أوجد العددين .



ثانياً مسائل المستوى الأول

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١)  $5 - 4 = \dots\dots\dots$  [٢٤] [٤٢] [١٨] [١٠]

٢)  $\frac{100}{99} + \dots\dots\dots$  [١] [صفر] [١٠] [ $\frac{10}{99}$ ]

٣)  $\frac{1}{1} = \dots\dots\dots$  [١] [صفر] [١٠] [غير محدد]

٤) مجموعة حل المعادلة  $x - 1 = 1$  هي  $\dots\dots\dots$  [٢] [١٤٠] [١] [٢٤١]

٥) مجموعة حل المعادلة  $x + 2 = 120$  هي  $\dots\dots\dots$  [٢] [٣] [٤] [٤]

٦) إذا كان  $x = \frac{1}{1-x}$  فإن  $x = \dots\dots\dots$  [٤] [٦] [٥] [٧]

٧) إذا كان  $x = \frac{5+x}{3+x}$  فإن  $x = \dots\dots\dots$  [٣] [٦] [١٣] [١٤]

٨) إذا كان  $x = \frac{4+x}{4+x}$  فإن  $x = \dots\dots\dots$  [٣] [٤] [٥] [٦]

٩)  $x^2 + x^3 = \dots\dots\dots$  [٢٠] [٦٠] [١٢٠] [١١٠]

١٠) إذا كان  $x^2 = 5.40$  فإن  $x = \dots\dots\dots$  [٦] [٧] [٥] [٨]

١١) إذا كان  $x^2 = 4$  فإن  $x = \dots\dots\dots$  [٢] [٣] [١] [٠]

١٢) إذا كان  $x^2 = 120$  فإن  $x = \dots\dots\dots$  [٣] [٤] [٥] [٦]

١٣) إذا كان  $x^2 = 90$  فإن  $x = \dots\dots\dots$  [١] [صفر] [١٠] [٩]

١٤) لجنة مؤلفة من ١٠ أعضاء يكف طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب رئيس  
لهذه اللجنة =  $\dots\dots\dots$  [٢٠] [٦٠] [٤٥] [٩٠]

١٥) عدد طرق ترتيب ٦ أطفال في دائرة يساوي  $\dots\dots\dots$  [٢٤] [٧٢٠] [٦٠] [١٢٠]



أجدر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ①  $١٠٠٠٠٠٠٠٠ = ١٠^٧$  [ ١ د ٢ ص د ٣ صفر د ٤ - ٥ ]
- ②  $١٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٧!$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ١٤ د ٤ ٧ د ٥ ١٣٠ ]
- ③  $١٠٠٠٠٠٠٠ = ١ + ٢$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ٨ د ٤ ٧٤ د ٥ ٣٦ ]
- ④  $١٠٠٠٠٠٠٠ = ٢ - ٥$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ٨ د ٤ ١٦ د ٥ ١١٤ ]
- ⑤ إذا كان  $١٠ = ٢١$  فإن  $١٠^٣ = ٢١^٣$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ٧٢ د ٤ ١٣٢ ]
- ⑥ إذا كان  $١٠^٣ = ١٠$  فإن  $١٠^٣ = ١٠$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ٧ د ٤ ٢ د ٥ ٨ ]
- ⑦ إذا كان  $١٠^٣ = ١٢٠$  فإن  $١٢٠ = ٣ - ٧$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ٤ د ٤ ١ ]
- ⑧ إذا كان  $١٠^٣ = ١٢٠$  فإن قيمة  $١٢٠$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ٥ د ٤ ٢ ]
- ⑨ إذا كان  $١٠^٣ = ١٠$  فإن  $١٠ = ١$  [ ١ د ٢ ص د ٣ ٤ د ٤ ١ ]
- ⑩ عدد الطرق التي يمكن أن يجلس بها ٣ أشخاص على ٥ مقاعد تساوي .....

- ⑪ [ ١ د ٢ ص د ٣ ١٧ د ٤ ١٥ د ٥ ٦٠ ] عدد طرق ترتيب حروف كلمة مصنع تساوي .....

- ⑫ [ ١ د ٢ ص د ٣ ٩ د ٤ ١٠ د ٥ ٧٤ ] لجنة مؤلفة من ١٢ عضواً عدد الطرق التي يمكن بها اختيار رئيس ونائب رئيس لهذه اللجنة تساوي .....
- ⑬ [ ١ د ٢ ص د ٣ ٢٣ د ٤ ٦٦ د ٥ ١٣٢ ] عدد طرق اختيار عدد مكون من رقمين مختلفين من مجموعة الأرقام { ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ } تساوي .....
- ⑭ [ ١ د ٢ ص د ٣ ٤٨ د ٤ ٣٠ د ٥ ١٢ ] عدد طرق ترتيب ٧ أطفال في دائرة تساوي .....

- ⑮ [ ١ د ٢ ص د ٣ ٧ د ٤ ٧٢٠ د ٥ ٥٠٤٠ ] رقم تليفون يتكون من ٨ منازل هـ بعد أن تكون أحد الأرقام ٨٤٥٤٤٣

- ⑯ [ ١ د ٢ ص د ٣ ٤٩٩٩٩٩ د ٤ ١٠٠٠٠٠ د ٥ ٩٩٩٩٩٩ ] بينما باقي المنازل تنانف من أي رقم دون قيد ،كم عدد أرقام التليفونات المختلفة المتاحة ؟



### ثالثاً مسائل المستوى الثاني

- ١٤٠) كم طريقة يمكن احسام أن يتناول وجبه ومشروب من ثلاث وجبات (مكسنة - فراح - سلك) ومشروبين (عصير - مباد غازية) مثل ذلك بمخطط الشجرة البيانية
- ١٤١) كم عدد مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥
- ١٤٢) كم عدد مكوناً من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥
- ١٤٣) كم عدداً زوجياً مكون من رقمين مختلفين يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥
- ١٤٤) كم عدداً من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ دون تكرار للرقم ٥
- ١٤٥) كم عدداً من أربع خانات يمكن تكوينه من الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥ وبداً بكل شيء بالرقم ٥ بدون تكرار للرقم ٥
- ١٤٦) كم عدداً يمكن تكوينه من الأرقام ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ يتألف من أربعة أرقام مختلفة ويبدأ بالقسمه على ٩
- ١٤٧) كم طريقة يمكن تكوين لجنة من رجل وسيدة من بين ٣ رجال و ٤ سيدات
- ١٤٨) كم طريقة يمكن اختيار حرف صحيح وآخر معتل من أربعة حروف صحيحة ولازلة معتلة ؟
- ١٤٩) تعطي مدرسة ثلاثة جوائز لاولى في القسم الأدبي والثانية في القسم العلمي والثالثة في قسم الرياضيات فإذا كان عدد المتسابقين ٨، ٧، ٤ على التوالي فكم طريقة يمكن توزيعها ؟
- ١٥٠) كم يقدم أحد محلات الأيس كريم ثلاثة أحجام مختلفة وخمس نكهات (صغير - متوسط - كبير) (قراولة - مانجو - ليمون - حليب - شيكولاته) كم عدد الاختيارات المتاحة بشرط واحدة من الأيس كريم ؟
- ١٥١) كم من مجموعة من الحروف { ا، ب، ج، د، هـ، ز، ح، ط } أوجد
- ١٥٢) ١) عدد طرق اختيار حرف واحد. ٢) عدد طرق اختيار حرفين مختلفين. ٣) عدد طرق اختيار حرف واحد.
- ١٥٣) كم طريقة يمكن ترتيب ٥ أشخاص في ٤ مقاعد على شكل دائرة ؟



١٧) أوجد قيمة كل من:

١) $5 + 7$	٢) $3 - 1$	[٥]
٣) $5 - 3$	٤) $3 - 2$	[مطروح]
٥) $2 \times 3$	٦) $3 \times 4$	[٦]
٧) $2^2 \times 3^2$	٨) $2^2 + 3^2$	[٥]
٩) $2^3 + 3^3$	١٠) $2^3 + 3^3$	[٥، ١١]
١١) $\frac{1}{2}$	١٢) $\frac{100}{99}$	[١٠٠]

١٨) أوجد قيمة  $u$  التي تحقق كل من:

١) $1 = u$	٢) $24 = u$	[١٤٠]
٣) $120 = 2 - u$	٤) $5 = \frac{1+u}{u}$	[٧]
٥) $42 = \frac{1+u}{1-u}$	٦) $120 = u^2$	[٧]
٧) $2730 = u^2$	٨) $720 = 3u^2$	[٧]
٩) $210 = 2u^2 + u$	١٠) $4 = u^2 + 3u$	[٣]
١١) $51 = u^2 + 3u + 2$	١٢) $120 = u^2$	[٧]

١٩) أوجد قيمة  $u$  إذا كان:

١) $210 = u^2$	٢) $3 + u = 2 + u$	[٣]
٣) $24 = u(1+u)$	٤) $56 = u(1+u)$	[٣]
٥) $\frac{2+u}{24} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{u}$	٦) $12 = 1 - u$	[٣]

٢٠) إذا كان  $u^2 = 60$  ،  $24 = u$  أوجد  $u - 1$

٢١) إذا كان  $u^2 = 120$  ،  $120 = u$  أوجد  $u - 1$



[٥] ٢٦ إذا كان  $٣٦٠ = ٢٠٠ + ١٦٠$ ، أوجد  $٥٤٠ = ٣٠٠ + ٢٤٠$

[٦] ٢٧ إذا كان  $٣٦٠ = ٢٠٠ + ١٦٠$ ، أوجد قيمة  $٥٤٠$

[٧] ٢٨ إذا كان  $٣٦٠ = ٢٠٠ + ١٦٠$ ، أوجد قيمة  $٥٤٠$

[٨] ٢٩ إذا كان  $٣٦٠ = ٢٠٠ + ١٦٠$ ، أوجد قيمة  $٥٤٠$

[٩] ٣٠ أوجد عدد طرق اختيار رئيس ونائب رئيس وسكرتير من لجنة مكونة من سبعة أشخاص.

[١٠] ٣١ من بين ثمانية طلاب يمكن تعلم التربية البدنية / اختيار ثلاثة طلاب (واحد تلو الآخر) للاشتراك في فرق كرة القدم وكرة السلة والكرة الطائرة على الترتيب.

٣٢ أثبت أن:  $٢٠٠ + ١٦٠ = ٣٦٠$

٣٣ أثبت أن:  $٢٠٠ + ١٦٠ = ٣٦٠$

### مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

[١١] ٣٤ إذا كان  $\frac{٤}{١-٢} = \frac{٢-٢}{٥}$ ، فأوجد قيمة  $٢$

[١٢] ٣٥ إذا كان  $\frac{٥}{٣-٢} = \frac{٤-٢}{٣}$ ، فأوجد قيمة  $٢$

[١٣] ٣٦ إذا كان  $٢٠٠ + ١٦٠ = ٣٦٠$ ، فما قيمة  $٢$

٣٧ أثبت أن:  $١٠٠ = ٢٠٠ + ١٦٠$

[١٤] ٣٨ إذا كان  $٢٠٠ < ٣٦٠$ ، فأوجد أقل قيمة للعدد  $٢$  تحقق المتباينة السابقة.

[١٥] ٣٩ إذا كان  $٢٠٠ + ١٦٠ = ٣٦٠$ ، فأوجد قيمة  $٢$



## التوافيق

## الحرس

٣

علماً فيما سبق أن التباديل هي إختيارات مرقبة يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء مأخوذة كلها أو بعضها في كل مرة وهي بعض الأحيان تحتاج إلى إجراء إختيارات بدون ترتيب.

فمثلاً

إذا كان أربعة لاعبة { ا ، ب ، هـ ، ز } وتقام مباريات لكرة القدم بنظام الدوري بين المرق بحيث تقام المباراة على ملعب الفريق المذكور أولاً فإن الترتيب هنا له أهمية فتكون الإختيارات الممكنة هي :

( ا ، ب ) ، ( ا ، هـ ) ، ( ا ، ز ) ، ( ب ، هـ ) ، ( ب ، ز ) ، ( هـ ، ز ) ، ( ا ، ب ، هـ ) ، ( ا ، ب ، ز ) ، ( ا ، هـ ، ز ) ، ( ب ، هـ ، ز ) ، ( ا ، ب ، هـ ، ز )

ويسمى كل إختيار من الإختيارات « تبديلية »

إما إذا أردنا إقامة مباراة بين فريقين من فرق الأندية الأربعة في أحد الإحتفالات الرياضية ففي هذه الحالة لا يهم الترتيب وتكون الإختيارات الممكنة هي :

{ ا ، ب } ، { ا ، هـ } ، { ا ، ز } ، { ب ، هـ } ، { ب ، ز } ، { هـ ، ز }

ويسمى كل إختيار من الإختيارات « توفيقاً »





مما سبق نلاحظ أن:

$(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)$  لأن  $(1, 2) \neq (2, 1)$   
 أما  $\{1, 2\}, \{2, 1\}$  فليكن  $\{1, 2\}$  واحد لأن  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$   
 هي التباديل نهتم بالترتيب أما التوافيق لا نهتم بالترتيب.  
 ومن ذلك يمكن تعريف التوافيق كما يلي:

### تعريف

عدد التوافيق المكونة كل منها من  $r$  من الأشياء والمختارة من بين  $n$  من العناصر نفس الوقت هو  $C_n^r$  حيث:  $r \geq 0, n \geq r, n \in \mathbb{N}$

معنى ذلك:

أن كل مجموعة تتكون من كل أو من جزء من الأشياء بصرف النظر عن ترتيبها  
 « عناصر » المجموعة تسمى توفيقاً ويرمز لعدد المجموعات الجزئية التي يمكن  
 تكوينها من  $n$  من العناصر والتي تكون عدد عناصرها  $r$  (حيث  $r \geq 0$ ) بالرمز  $C_n^r$   
 وتقرأ «  $n$  قاف  $r$  » أو بالرمز  $(C_n^r)$  وتقرأ «  $n$  فوق  $r$  »

فمثلاً

$C_5^2$  تعني عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على 2 عناصر ويمكن  
 تكوينها من مجموعة تحتوي على 5 عناصر وتقرأ « 5 قاف 2 » أو « 5 فوق 2 »

وأيضاً

$C_5^1$  تعني عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي كل منها على 1 عناصر ويمكن  
 تكوينها من مجموعة تحتوي على 5 عناصر.

وبالنسبة لـ  $C_n^0$  تعني عدد المجموعات الجزئية الخالية التي يمكن تكوينها من مجموعة  
 تحتوي على  $n$  عناصر وهي بالطبع مجموعة واحدة أي أن  $C_n^0 = 1$

وأيضاً

$C_n^n$  وهي على عدد المجموعات الجزئية الرباعية التي يمكن تكوينها من مجموعة تحتوي على  
 $n$  عناصر وهي بالطبع مجموعة واحدة حيث أن أي مجموعة هي مجموعة جزئية من نفسها أي أن  
 $C_n^n = 1$  أيضاً ونلاحظ في مثال الأندية الأربعة السابقة أننا نختار فريقين من 4 أندية وأن عدد  
 التباديل يساوي 12 تبديلة وعدد التوافيق يساوي 6 توفيقاً.







## نتيجة ٦

إذا كان  $u = v$ ، فإن  $u = v$  أو  $u = v + 1$

## ملاحظة

هناك بعض الجمل الدالة على التوافق والتي لا نهتم بترتيبها.

- ١ اختيار مجموعة من الأشخاص (دون تحديد عمل كل منهم حسب الترتيب).
  - ٢ اختيار مجموعة جزئية من مجموعة كائنية.
  - ٣ الاختيار أو السحب دفعة واحدة (معاً) أو عشوائياً بدون ترتيب.
- مع ملاحظة أن:

$(a, b)$ ،  $(b, a)$  تعبر عن تبديلين حيث نهتم بالترتيب هي التباديل.  
أما  $\{a, b\}$ ،  $\{b, a\}$  تعبر عن توافق واحد حيث لا نهتم بالترتيب هي التوافيق.

## مثال

أوجد ناتج كل من: ١  $10^6$

٢  $10^4$

٣  $10^3$

## الحل

$$10 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{10!}{4!} = 10^6 \text{ ١}$$

باستخدام الحاسبة:

يمكن استخدام المفاتيح  $\div$  Shift من اليسار لليمين لكتابة رمز التوافق.

كما يلي: 15 الناتج  $\rightarrow$   $\div$  Shift  $\rightarrow$  6  $\rightarrow$  ابدأ

$$10 = 10^4 \text{ ٢}$$

$$1 = 10^3 \text{ ٣}$$



### مثال ٢

فاوجد قيمة  $u$

إذا كان  $u^2 = 28$

### الحل

$$u^2 = 28$$

$$u = \frac{(1-u)u}{1 \times 2} \therefore$$

$$u = u - u^2$$

$$u = 28 - u - u^2 \therefore$$

$$0 = (u+28)(u-1) \quad \therefore u = 1 \quad \text{أو} \quad u = -28 \quad (\text{مرفوض لأن } u \geq 0)$$

### حل آخر ثان

$$u^2 = 28$$

$$u = \frac{u^2}{2} \therefore$$

$$u = 2 \times 28 = 56$$

$$u \times u = 28 \therefore$$

$$u^2 = 28 \therefore$$

$$u = 28 \therefore$$

### حل آخر ثالث

$$u^2 = 28$$

$$u = \frac{u}{2 \times (2-u)} \therefore$$

$$2 \times u = \frac{u(1-u)}{2-u} \therefore$$

$$u = 28 - u - u^2 \therefore u = 28 - u - u^2$$

$$u = 28 \therefore$$

$$0 = (u+28)(u-1)$$

$$u = 1 \quad (\text{مرفوض لأن } u \geq 0)$$

### مثال ٣

إذا كان  $u^2 = 120$  ، فاوجد قيمة كل من  $u$  و  $v$

### الحل

$$u^2 = 120 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{u^2}{2}$$

$$2 \times 120 = u^2$$

$$u = 24 \therefore$$

١٠	٧٢٠
٩	٧٢
٨	٨
١	



$$8 \times 9 \times 10 = 720$$

$$10 = 2 \times 5$$

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$4 = 2^2$$

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$$

$$720 = \frac{2^4 \times 3^2 \times 5}{2^2} \times 24$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$4 = 2^2$$

## مثال

أوجد قيمة  $x$

$$25 = 5^x$$

## الحل

$$25 = 5^x$$

$$25 = \frac{5^x}{5}$$

$$5^x = 5 \times 5 = 5^2$$

$$x = 2$$

$$25 = 5^x \Rightarrow 5^2 = 5^x$$

$$25 = 5^x$$

$$5^x = 5^2$$

لاحظ أن

## مثال

أوجد قيمة  $x$

$$2 + 3^x = 3^2$$

## الحل

$$2 + 3^x = 3^2$$

$$(2+)$$

$$2 = 3^2 - 3^x$$

$$2 = 9 - 3^x$$

$$10 = 3 + 3^x$$

$$3 - 10 = 3^x$$

$$(4+) \quad 17 = 3^x$$

$$3 = 3^x$$

إذا كان  $3^x = 3^2$

$$3 = 3^2$$

$$3 + 3 = 6$$

لاحظ أن



### مثال ٦

إذا كان  ${}^nP_2 = 120$  ،  ${}^nP_3 = 715$  أوجد قيمة  $n$  ،  $r$

### الحل

$${}^nP_2 = 120$$

$$2 = n - r$$

$${}^nP_3 = 715$$

$$120 = {}^nP_2 = \frac{n!}{(n-2)!}$$

$$13 = 2 + n$$

يحل ١ ، ٢ معًا بالتجمع

$$n = 13$$

وبالتعويض في ٢ عن  $n$

$$r = 2$$

$${}^nP_3 = 715 = \frac{n!}{(n-3)!}$$

①

$$715 = \frac{n!}{(n-3)!}$$

$${}^nP_2 = 120 = \frac{n!}{(n-2)!}$$

②

٦	١٧١٦٠
١١	١٧١٦
١٢	١٥١
١٣	١٣
	١

### مثال ٧

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ٣ أشخاص من بين ١٢ شخص

### الحل

∴ الاختيار لا يعتمد على الترتيب فإن كل اختيار يسمى توفيقًا

$$\text{عدد الاختيارات} = {}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 220$$

### مثال ٨

بكم طريقة يمكن انتخاب لجننتين تتكون كل منها من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص في كلتا اللجننتين

### الحل

$$\text{عدد طرق انتخاب اللجنة الأولى} = {}^{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210$$

وبعد اختيار اللجنة الأولى فإننا نلاحظ أن عدد الأشخاص أصبح ٦ أشخاص نختار منهم لجنة من ٤ أشخاص.



عدد طرق انتخاب اللجنة الثانية =  ${}^4P_2 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 6$  طرق  
عدد الطرق التي يتم بها انتخاب اللجنتين =  $10 \times 6 = 60$  طرق

### مثال

بكم طريقة يمكن تكوين لجنة من بين ١٢ طالبًا و ٩ طالبات بحيث تتكون اللجنة من:  
١) أربعة طلبة وثلاث طالبات.  
٢) أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات.

### الحل

عدد طرق اختيار ٤ طلبة من بين ١٢ طالب =  ${}^{12}C_4 = 495$

إذا كان الربط بين الاختيارين يعرف

عدد طرق اختيار ٣ طالبات من بين ٩ طالبات =  ${}^9C_3 = 84$

١) عدد طرق اختيار أربعة طلبة وثلاث طالبات

٢) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٣) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٤) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٥) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٦) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٧) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٨) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٩) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٠) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١١) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٢) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٣) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٤) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٥) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٦) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٧) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٨) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

١٩) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٢٠) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٢١) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٢٢) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

٢٣) عدد طرق اختيار أربعة طلبة أو ثلاثة طالبات

### نشاط

#### مثلث باسكال :

بليز باسكال (١٦٢٣ - ١٦٦٢) ، هو فيلسوف فرنسي ورياضي وفيزيائي قدم نظرية الاحتمالات وصمم تنظيمًا ثلاثيًا من الأرقام سمي مثلث باسكال في حساب الاحتمالات واخترع باسكال أيضًا آلة حاسبة تؤدي عمليات الجمع والضرب.  
من تأمل مثلث الأعداد المقابل ،

#### ١) الصف الأول ،

يمثل (١ = ١) من العناصر مأخوذ منها

١ = ١ أو ١ = ١

فيكون ١ = ١ ، ١ = ١ ، ١ = ١

#### ٢) الصف الثاني ،

يمثل (٢ = ١) من العناصر مأخوذ منها

١ = ١ أو ١ = ١ أو ١ = ١ في كل مرة

فيكون ١ = ١ ، ١ = ١ ، ١ = ١ ، ١ = ١ وهكذا ...





٢. كل صف يبدأ بالواحد لأن  $1 = 1$  وينتهي بالواحد لأن  $1 = 1$
٣. كل عدد في أي صف باستثناء الصف الأول يساوي مجموع العددين الموجودين  
فمثلاً الصف الثالث  $1, 1, 1$  وهكذا.
٤. يوجد تماثل حول العدد الذي يوسط الصف (إذا كانت  $n$  فردية)
٥. يوجد تماثل حول العددين اللذين يتوسطان الصف (إذا كانت  $n$  زوجية)

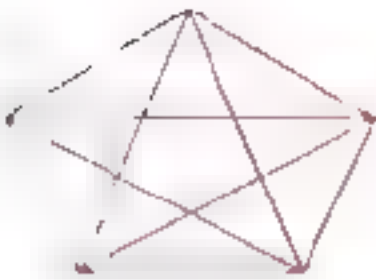
### نشاط فطر الشكل الهندسي :

هو القطعة المستقيمة التي تصل بين رأسين غير متجابين

عدد أقطار المثلث = ٣

عدد أقطار الشكل الرباعي = ٢

عدد أقطار الشكل الخماسي = ٥



عدد أقطار أي شكل هندسي عدد أضلاعه  $n$

$$\frac{n(n-3)}{2} =$$

$$\therefore \text{عدد أقطار الشكل السداسي} = \frac{6(6-3)}{2} = 9$$

$$\therefore \text{عدد أقطار الشكل السباعي} = \frac{7(7-3)}{2} = 14$$

$$\therefore \text{عدد أقطار الشكل ذو عشرة أضلاع} = \frac{10(10-3)}{2} = 35$$

كما يمكن استخدام القاعدة التالية :

عدد أقطار أي شكل هندسي عدد أضلاعه  $n$

$$n - 3 =$$

$$\text{ويكون عدد أقطار الشكل السداسي} = 1 - 3 = 9$$



# تمرين

أولاً راجع معنا واختر نفسك

اختبار تراكمي ٩

الدرجة الكلية ٦٠



١ اجب عن الاسئلة الآتية :

١٠ د ١ د ٥ د ١٠ د

١ =  $\frac{900}{49}$

٢ مجموعة حل المعادلة  $x - 2 = 1$  هي .....

{٣، ١} د {٢} د {٣، ٢} د {٢}

٣ إذا كان  $r = 6$  فإن  $r = \dots$  [ ٣ د ٢ د ٤ د ٥ ]

٤ إذا كان  $a, b, c$  ثلاث حدود موجبة ومتتالية عن متتالية هندسية

فإن  $b > \dots$  [  $\frac{a+1}{2}$  د  $a + 1$  د  $a$  د  $\frac{a}{2}$  ]

٥ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية :

(١)  $1 - u = 720$  (ب)  $u^3 + u^2 + u = 0$

٦ أوجد متتالية الحسابية التي حدها السادس يساوي ٢، والنسبة بين حديها

الرابع والعاشر كنسبة  $4:7$



## ثانياً مسائل المستوى الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١)  $2^3 \times 3^2 =$  .....  
 [ ١٠ د ٢٠ د ١٨ د ١٢٠ د ]
- ٢)  $5^3 \times 2^2 =$  .....  
 [ صفر د ١ د ٥ د ٢٥ د ]
- ٣)  $4^3 \times 3^2 =$  .....  
 [ ١ د ٩ د ٨ د ٦٠ د ]
- ٤)  $3^3 \times 2^2 =$  .....  
 [ ١ د ٥ د ٦ د صفر د ]
- ٥)  $2^3 \times 3^2 =$  .....  
 [ ١ د ١٢ د ١٠ د ١٢٠ د ]
- ٦)  $3^3 \times 2^2 =$  .....  
 [ ٢ د ١٢ د ١٠ د ١٢٠ د ]
- ٧)  $4^3 \times 3^2 =$  .....  
 [ ١ د صفر د ٩٩ د ١٠٠ د ]
- ٨)  $5^3 \times 2^2 =$  .....  
 [ ١٩ د ١٠٠ د ٥٠ د ١ د ]

٣) إذا كان  $2^3 \times 3^2 = ٤٢٥$  أوجد قيمة : .....

٤) مدرسة بها ١٢ معلم يراد تشكيل لجنة مكونة من ٤ معلمين بكم طريقة ؟  
 (١٠)

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

- ١)  $2^3 + 3^2 + 4^1 =$  .....  
 [ ٥ د ٦ د ٧ د ٨ د ]
- ٢)  $2^3 + 3^2 + 4^1 + 5^0 + 6^1 + 7^0 + 8^1 =$  .....  
 [ ١٦ د ٣٢ د ٤٦ د ٦٤ د ]
- ٣)  $2^3 \times 3^2 = ١٨$  .....  
 [ ٩٨ د ٢ د ٤٩٥٠ د ١٠٠ د ]
- ٤) إذا كان  $2^3 \times 3^2 = ٢١$  فإن ٣ .....  
 [ ٧ د ٨ د ٩ د ١٠ د ]
- ٥) إذا كان  $2^3 \times 3^2 = ٧$  فإن ٣ .....  
 [ ٧ د ٨ د ٩ د ١٠ د ]
- ٦) إذا كان  $2^3 - 3^2 = ١٠$  فإن ٣ .....  
 [ ١ د ٢ د ٣ د ٧ د ]
- ٧) إذا كان  $2^3 \times 3^2 = ١٠$  فإن ٣ .....  
 [ ١ د ٢ د ٣ د صفر د ]
- ٨) إذا كان  $2^3 \times 3^2 = ٢٨$  فإن ٣ .....  
 [ ٢ د ٤ د ٦ د ٨ د ]
- ٩) إذا كان  $2^3 \times 3^2 = ٢٨$  فإن ٣ .....  
 [ ٢ د ٦ د ٨ د ١٠ د ]



١٠) إذا كان  ${}^nP_r = {}^nPr$  فإن  $n = \dots$

١١) إذا كان  ${}^nP_1 + {}^nP_2 + {}^nP_3 + \dots + {}^nP_n = 31$  فإن  $n = \dots$

١٢) عدد طرق اختيار فريق من ٤ أشخاص من مجموعة بها ٩ أشخاص يساوي

١٣) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه،

١) عدد الطرق التي يمكن تشكيل لجنة من ٢ طلاب من بين ٩ طلاب =

٢) عدد طرق اختيار ٣ أشخاص من ٥ أشخاص =

٣) عدد طرق الإجابة عن ٤ أسئلة فقط في امتحان يحتوي على ٩ أسئلة =

٤) عدد طرق اختيار كرة حمراء وأخرى بيضاء من بين ٥ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء =

٥) عدد المجموعات الجزئية ذات العنصرين التي يمكن تكوينها من  $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  يساوي

٦) إذا كان  ${}^nP_1 = 35$  فإن  $n = \dots$

٧) إذا كان  ${}^nP_1 = {}^nP_2$  فإن  $n = \dots$

٨) إذا كان  ${}^nP_1 = {}^nP_2$  فإن  $n = \dots$

٩) إذا كان  ${}^nP_1 = {}^nP_2$  فإن  $n = \dots$

١٠) إذا كان  ${}^nP_1 + {}^nP_2 = 36$  فإن  $n = \dots$

١١) إذا كان  ${}^nP_1 = {}^nP_2$  فإن  $n = \dots$

١٢) إذا كان  ${}^nP_1 = {}^nP_2$  فإن  $n = \dots$



١٧ إذا كانت المجموعة  $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$  أوجد .

① عدد المجموعات الحزئية الثنائية لهذه المجموعة .

② عدد المجموعات الحزئية الثلاثية لهذه المجموعة .

[١١١٥]

### مسائل للمستوى الثاني

١٨ بكم طريقة يمكن للجنة مكونة من خمسة أعضاء أن تتخذ قراراً بالأغلبية . [١١]

١٩ بكم طريقة يمكن إنتخاب لجننتين لتكون كل منها من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص في كلتا اللجنتين . [٣١٥٠]

٢٠ من بين ١٠ معلمين  $A$  ،  $B$  معلمات في مدرسة بكم طريقة يمكن تكوين لجنة مكونة من ٤ معلمين و ٣ معلمات لتعمل المدرسة في مناسبة ما ؟ [١١٧٦٠]

٢١ يوجد في أحد الصفوف ١٠ طلاب  $A$  ، طالبات بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة أنشطة خماسية تتألف من ثلاثة طلاب وطالبتين من هذا الصف ؟ [٣٣٩٠]

٢٢ من بين أربعة معلمين يراد إختيار معلم لتدريب طلبة الأوليمبياد في مادة الرياضيات ثم معلم آخر لإعداد الإختبار أوجد عدد طرق الإختيار . [١٢]

٢٣ إذا كان  $3^x = 120$  أوجد قيمة  $3^y - 9$  . [١١]

٢٤ إذا كان  $3^x - 3^y = 84$  فما قيمة  $|x - y|$  . [١٩]

٢٥ إذا كان  $3^x - 2 = 21$  فما قيمة  $3^y$  . [١١]

٢٦ إذا كان  $3^x = 3$  ،  $3^y = 3^{x+2}$  ،  $3^z = 3^{x+y}$  أوجد قيمة  $|x - z|$  . [٢]

٢٧ إذا كان  $3^x = 108$  ،  $3^y = 108$  فأوجد قيمة  $x, y$  . [٢٤١٥]

٢٨ إذا كان  $3^x = 24$  ،  $3^y$  فأوجد قيمة  $3^x$  ، ثم أوجد أقل قيمة لعدد  $n$  التي تجعل هذه العلاقة صحيحة . [١١١٥]

٢٩ إذا كان  $3^x + 3^y = 3^z = \frac{9}{4}$  فأوجد قيمة  $n$  . [١٩]



فأوجد قيمة  $n$

20 إذا كان  $u = \frac{1}{3}$  و  $v = 3$

أوجد قيمة  $n$

21 إذا كان  $u = 2$  و  $v = 7$  و  $u^2 - v = 2:7$

فأوجد قيمة  $n$

22 إذا كان  $u = 2$  و  $v = 7$  و  $u^{17} = 2 + 7$

فأوجد قيمة  $n$

23 إذا كانت  $u = 1$  و  $v = 28$  و  $u^3 + v = 1 + 28$

24 إذا كان  $u = 3$  و  $v = 210$  و  $u^3 = 3$  و  $v = 210$  فأوجد قيمة كل من  $u$  و  $v$

أكتب بدلالة المتباديل كل من:

1 $u^8$	2 $u^9$	3 $u^9$	4 $u^9$
5 $u^8$	6 $u^9$	7 $u^9$	8 $u^9$

أكتب مستخدماً الصورة  $u^n$  كل مما يأتي:

1 $\frac{u^8}{3}$	2 $\frac{u^8}{2}$	3 $\frac{u^8}{2}$
4 $\frac{u^8}{1}$	5 $\frac{u^8}{8}$	6 $\frac{u^8}{1}$

### الأسئلة

مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

27 اختر لإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

1 إذا كانت  $u = 3$  و  $v = 2$  و  $u^3 + v = 3^3 + 2 = 27 + 2 = 29$

[ 1 4 4 4 4 4 ]

2  $u = 1$  و  $v = 2$  و  $u^2 - v = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

3 إذا كان  $u = 2$  و  $v = 7$  و  $u^2 - v = 2^2 - 7 = 4 - 7 = -3$

[ 1 4 10 10 10 10 ]

4 إذا كان  $u = 1$  و  $v = 2$  و  $u^3 + v = 1^3 + 2 = 1 + 2 = 3$

[ 1 4 10 10 10 10 ]





⑤ إذا كان  $u^2 + v^2 = 720 = 3^2 \cdot 2^4 \cdot 5$  فإن  $u = \dots$

[19 4 25 4 31 4 28]

⑥ إذا كان  $u^2, v^2, w^2$  هي تتابع حسابي فإن  $u = \dots$

[11 4 12 4 13 4 14]

⑦ إذا كان  $u^2 + v^2 = 1 + u^2 + v^2$  فإن  $\dots = \frac{1 + u^{10} + v^{10}}{u^{10} + 1 - v^{10}}$

[ $\frac{v}{1+v}$  4  $\frac{12-v}{1-v}$  4  $\frac{v-12}{1+v}$  4  $\frac{12-v}{v}$ ]

⑧ إذا كان  $u^2 - v^2 = 1 + u^2 + v^2$  وكان  $\frac{1+v}{u} = \dots$  فإن  $\frac{A}{B} = \frac{1 - v^2 u^2 + 2 - v^2 u^2}{v^2 u^2 + 1 - v^2 u^2}$

[2 4 3 4 4 4 5]

$\dots = \dots$  فإن  $v = \dots$

فأثبت أن:  $u < 10$

٧٨ إذا كان  $u^2 < v^2$

٧٩ إذا كان  $u^2 < v^2 < 1$  فما قيمة:  $[v - 1]$

[١]

٨٠ إذا كان  $u^2 + v^2 = u^2 + v^2 + 5$  أوجد قيمة:  $u$

[١٤]

٨١ إذا كان  $u^2 + v^2 = 1 + u^2 + v^2$  :  $2 = 1 + u^2 + v^2$  :  $5 = u^2 + v^2$  أوجد قيمة:  $u$

[٢١٧]

٨٢ أثبت أن:  $u^2 = 1 - v^2$

٨٣ إذا كانت  $S$  مجموعة غير خالية وكان  $S = \{(a, b) : (a, b) \in S, a \neq b\}$

وكان عدد عناصر  $S$  يساوي ٧٢،  $\{(a, b) : (a, b) \in S, a \neq b\}$

أوجد عدد عناصر  $S$

[٣]



# ثانيًا : التفاضل والتكامل

## الوحدة الثالثة :

- الدرس ① . معدل التغير
- الدرس ② الإستقلاق
- الدرس ③ قواعد الإستقلاق
- الدرس ④ مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة)
- الدرس ⑤ : مشتقات الدوال المثلثية
- الدرس ⑥ ، تطبيقات على المشتقات
- الدرس ⑦ : التكامل







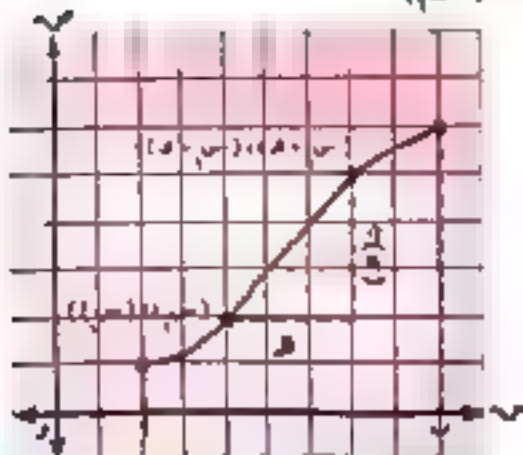
## معدل التغير

الكراس

١



إذا كانت  $d: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  حيث  $s = d(t)$  فإن أي تغير في قيمة  $s$  من  $s_1$  إلى  $s_2$  في مجال  $d$  يقابله تغير في قيمة  $s$  من  $d(s_1)$  إلى  $d(s_2)$  وعليه فإن:  
مقدار التغير في  $s = \Delta s$  (ويفراد لثا  $s$ )  $= s_2 - s_1$   
مقدار التغير في  $s = \Delta s = d(s_2) - d(s_1)$



ويعتبار  $(s_1, d(s_1))$

نقطة على منحنى الدالة  $d$

فإن لكل تغير في إحداثيها السيني من

$s_1$  إلى  $s_2 = s_1 + \Delta s$

بحيث  $s_1 \in [a, b]$  و  $\Delta s \neq 0$







## مثال

إذا كان  $d = (س) = س^2 + 3س$  فأوجد :

- ① دالة متوسط التغير هي د عندما  $س = ١$
- ② متوسط التغير هي د عندما تتغير  $س$  من ٢ إلى ٣

## الحل

$$d = (س) = س^2 + 3س$$

$$\text{عندما } س = ١$$

$$\therefore d = (س) = س^2 + 3س$$

$$\text{عندما } س = ٢$$

$$\therefore d = (س) = س^2 + 3س = (٢ + ١)س^2 + 3(٢ + ١)س$$

$$d = (س + ١) = س^2 + ٦س + ٢ + ٣س = س^2 + ٩س + ٢$$

### دالة التغير

$$ت(س) = d = (س + ١) - d = (س) - (س + ١)$$

$$= س^2 + ٦س + ٢ - (س^2 + ٩س + ٢) = س^2 + ٦س + ٢ - س^2 - ٩س - ٢ = -٣س$$

$$ت(س) = -٣س = -٣(٢ + ١) = -٩ - ٣ = -١٢$$

### ① دالة متوسط التغير

$$\frac{ت(س) - ت(س + ١)}{س - (س + ١)} = \frac{ت(س) - ت(س + ١)}{س - (س + ١)}$$

$$\frac{-١٢ - (-١٢)}{س - (س + ١)} = \frac{-١٢ - (-١٢)}{س - (س + ١)} = \frac{-١٢ - (-١٢)}{س - (س + ١)}$$

$$\text{② عندما تتغير } س \text{ من ٢ إلى ٣} \quad \therefore س = ٣, ٢ = ٣ - ٢ = ١$$

$$\therefore \text{متوسط التغير} = ٣ \times ٢ + (١ - ٣) = ٦ - ٢ = ٤$$

وبممكن إيجاد متوسط التغير في د عندما تتغير  $س$  من ٣ إلى ٤

بأن نوجد د ، ٣ ، د (٢) ثم نوجد المتوسط كما يلي :

$$\text{عندما تتغير } س \text{ من ٢ إلى ٣ فإن } س = ٣, ٢ = ٣ - ٢ = ١$$

$$\text{وبكون } د(٣) = ٩ + ٩ = ١٨, د(٢) = ٤ + ٦ = ١٠$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{د(س) - د(س + ١)}{س - (س + ١)} = \frac{١٨ - ١٠}{٣ - ٢} = ٨$$



إذا كانت د:  $a, b \rightarrow c$  حيث  $c = d(s)$ ،  $s, s_1, s_2 \in [a, b]$

وكان متوسط التغير  $m(s)$  نهاية عندما  $s \rightarrow 0$  فإننا نحصل بهذه النهاية على دالة جديدة تسمى بمعدل تغير الدالة عند النقطة  $s$  حيث،

$$\text{معدل التغير في } d \text{ عند } s = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(s+h) - d(s)}{h} = \text{ثابت}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة

### ملخص لبعض القوانين

#### المربع

محيط المربع = طول الضلع  $\times 4$   $\Rightarrow d(s) = 4s$   
مساحة المربع = طول الضلع  $\times$  نفسه  $\Rightarrow d(s) = s^2$   
حيث  $s$  طول ضلع المربع

#### المستطيل

محيط المستطيل = (الطول + العرض)  $\times 2$   
مساحة المستطيل = الطول  $\times$  العرض

#### المكعب

المساحة الجانبية =  $4 \times$  مربع طول حرفه  $\Rightarrow d(s) = 4s^2$   
المساحة الكلية =  $6 \times$  مربع طول حرفه  $\Rightarrow d(s) = 6s^2$   
الحجم = مكعب طول حرفه  $\Rightarrow d(s) = s^3$   
حيث  $s$  طول حرف المكعب



### الدائرة

محيط لدائرة =  $2\pi r$  لو  $d = (س) = 2\pi r$

مساحة الدائرة =  $\pi r^2$  لو  $d = (س) = 2\pi r$

حيث  $r$  طول نصف قطر الدائرة

### الكرة

مساحة سطح الكرة =  $4\pi r^2$  لو  $d = (س) = 2\pi r$

حجم الكرة =  $\frac{4}{3}\pi r^3$  لو  $d = (س) = 2\pi r$

حيث  $r$  طول نصف قطر الكرة

### مثال

إذا كانت  $d = (س) = 2\pi r + 2\pi r - 2\pi r$  فأوجد متوسط التغير عندما تتغير  $r$  من 3 إلى 3.2 ثم أحسب معدل تغير الدالة  $d$  عندما  $r = 3$

### الحل

$$d = (س) = 2\pi r + 2\pi r - 2\pi r = 12$$

$$d = (س) = 2\pi r + 2\pi r - 2\pi r = 13.66 = 3 - (3.2) 2 + 2(3.2) = (3.2)$$

$$\text{متوسط التغير} = \frac{d(س_2) - d(س_1)}{س_2 - س_1} = \frac{13.66 - 12}{3.2 - 3} = \frac{1.66}{0.2} = 8.3$$

$$d = (س) = 2\pi r + 2\pi r - 2\pi r = 3 - (3 + 2) 2 + 2(3 + 2) = 12$$

$$12 + 8\Delta + 2\Delta = 3 - 2\Delta + 6 + 2\Delta + 8\Delta + 9 =$$

$$\Delta = 8 = \frac{12 - 12 + 8\Delta + 2\Delta}{\Delta} = \frac{d(س_2) - d(س_1)}{\Delta} = \frac{12 - 12 + 8\Delta + 2\Delta}{\Delta} = 8$$

$$\therefore \text{معدل التغير} = \frac{1}{\Delta} = 8 = (8) \text{ لو } \Delta = (8 + 8) = 16$$



## مثال

(إذا كانت  $y = \frac{2}{1-x}$  حيث  $x$  هو  $y$ ، فأوجد :

- ① دالة متوسط التغير في  $y$  عندما تتغير  $x$  من  $1$  إلى  $2$ ، و  
وأوجد هذا المتوسط عندما تتغير  $x$  من  $2$  إلى  $2.5$
- ② معدل التغير في  $y$  عندما  $x = 3$

∴  $(y) = (x) = (2) = (2.5) = (3)$

① ∴  $y = \frac{2}{1-x}$

$= \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-y}$  (بتوحيد المقامات)

$= \frac{2(1-y) - 2(1-x)}{(1-x)(1-y)} = \frac{2-2y-2+2x}{(1-x)(1-y)} = \frac{2x-2y}{(1-x)(1-y)}$

$\frac{2x-2y}{(1-x)(1-y)} \times \frac{1}{x-y} = \frac{(x) = (2)}{x-y} = \frac{2}{x-y}$

$\frac{2}{(1-x)(1-y)} = \frac{2}{(1-2)(1-2.5+2)} = \frac{2}{(1-2)(1-0.5+2)}$

عندما تتغير  $x$  من  $2$  إلى  $2.5$  تكون  $y = 2$ ،  $2.5 = 2 - 2.5 = 0.5$

∴  $\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-y} = \frac{2}{(1-2)(1-0.5+2)} = \frac{2}{(1-2)(1-0.5+2)}$

② معدل التغير =  $\frac{2}{x-y} = \frac{2}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$

$\frac{2}{(1-x)(1-y)} = \frac{2}{(1-3)(1-2)} = \frac{2}{(1-3)(1-2)}$

عندما  $x = 3$  يكون معدل التغير =  $\frac{2}{1 \times 2} = \frac{2}{2} = 1$



## مثال

احسب معدل تغير الدالة  $d(s) = \sqrt{s+8}$  عندما  $s=1$

## الحل

$$d(s) = \sqrt{s+8}$$

مجال  $d = ]-\infty, 8[$

$$\text{عند } s=1 \Rightarrow d(1) = \sqrt{1+8} = 3$$

$$d(1+h) = \sqrt{1+h+8} = \sqrt{9+h}$$

$$\text{معدل التغير} = \frac{d(1+h) - d(1)}{h} = \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h} \cdot \frac{\sqrt{9+h} + 3}{\sqrt{9+h} + 3} = \frac{(\sqrt{9+h})^2 - 3^2}{h(\sqrt{9+h} + 3)} = \frac{9+h-9}{h(\sqrt{9+h} + 3)} = \frac{h}{h(\sqrt{9+h} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3}$$

$$\text{عندما } s=1 \Rightarrow \text{معدل التغير} = \frac{1}{\sqrt{9+0} + 3} = \frac{1}{9}$$

**لاحظ:** لا يمكن إيجاد معدل تغير الدالة عند  $s=8$  لأن النهاية تكون غير موجودة عندها

**حل آخر** عندما  $s=1$

$$d(1) = 3 \quad \text{و} \quad d(1+h) = \sqrt{1+h+8} = \sqrt{9+h}$$

∴ دالة معدل التغير هي  $d$

$$= \frac{d(1+h) - d(1)}{h} = \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3}$$

$$\text{عند } s=1 \Rightarrow \text{معدل التغير} = \frac{1}{\sqrt{9+0} + 3} = \frac{1}{9}$$



## مثال

أوجد دالة متوسط التغير في  $d$  حيث  $d = (s)$  عندما تتغير  $s$  من  $s_1$  إلى  $s_2 + h$  ثم استنتج معدل التغير في  $d$  عند  $s = 2$

## الحل

$$d = (s) = s^2$$

$$\text{عندما } s = s_1$$

$$d = (s_1) = s_1^2$$

$$\text{عندما } s = s_1 + h$$

$$d = (s_1 + h) = (s_1 + h)^2$$

$$\text{دالة متوسط التغير} = \frac{d - (s_1)}{h} = \frac{(s_1 + h)^2 - (s_1)^2}{h}$$

$$\text{دالة معدل التغير} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d - (s_1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(s_1 + h)^2 - (s_1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s_1^2 + 2s_1h + h^2 - s_1^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2s_1h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2s_1 + h) = 2s_1$$

$$\therefore \text{عندما } s = 2$$

$$\text{عندما } s = 2$$

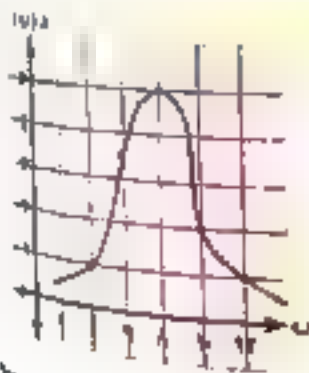
$$\therefore \text{معدل التغير في } d = 2 \times 2 = 4$$

## مثال

يوضح الشكل المقابل،

المنحنى  $y = d(u)$  حيث  $y$  جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الجنيهات،  $u$  الزمن مقدراً بالشهور. أوجد من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

$$① \quad u = 4 \text{ إلى } u = 8 \quad ② \quad u = 8 \text{ إلى } u = 10$$



## الحل

$$① \text{ من الرسم } d(8) = 5 \text{ ، } d(4) = 9$$



$$\text{متوسط التغير في } D = \frac{(1)D - (8)D}{1 - 8} = \frac{1 - 8}{1 - 8} = 1 \text{ مليون جنيه / شهر}$$

أي أن متوسط جملة المبيعات يتزايد بمقدار مليون جنيه شهرياً خلال هذه الفترة

$$(2) \text{ من الرسم } D(10) = 2 \text{ و } D(8) = 8$$

$$\text{متوسط التغير في } D = \frac{(8)D - (10)D}{8 - 10} = \frac{8 - 10}{8 - 10} = -1 \text{ مليون جنيه / شهر}$$

أي أن متوسط جملة المبيعات يتناقص بمقدار 1 مليون جنيه شهرياً خلال هذه الفترة

## مثال

صفيحة من المعدن على شكل دائرة تتعرض للحرارة فتتمدد بانتظام محتفظة بشكلها  
أوجد معدل التغير في مساحة سطح الصفيحة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما  
يكون طول نصف قطرها 14 (  $\frac{22}{7} \approx \pi$  )

## الحل

بفرض أن طول نصف القطر =  $r$  ، مساحة الصفيحة =  $\pi r^2$

$$\therefore D(\pi r^2) = 2\pi r$$

$$2\pi r = \frac{D(\pi r^2) - (\pi r^2)}{D} = \frac{D(\pi r^2) - (\pi r^2)}{D}$$

$$\frac{[2\pi r - \pi r^2]}{D} = \frac{2\pi r - \pi r^2}{D}$$

$$\text{معدل التغير} = \frac{2\pi r - \pi r^2}{D} \text{ ، } \pi = 3.14 \text{ ، } r = 14$$

عندما يكون طول نصف القطر = 14

$$\therefore \text{معدل التغير} = \frac{2\pi r - \pi r^2}{D} = \frac{2 \times 3.14 \times 14 - 3.14 \times 14^2}{D}$$



راجع معنا واحترم نفسك

عزيزي الطالب

في هذا المكان من كل تمرين مستجد

أسئله لمراجعة ما سبق في صورة اختيار تراكمي على ما سبق دراسته يتم الإجابة في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تذكر ما درست بإستقرار ولا نسيان ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك في تواصل مع ما درست وأيضاً يعززك على التفكير بطريقة مبتكرة وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط.

مسائل المستوى الأول

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

١) قيمة دالة التغير للدالة  $(س) = ٢س + ١$  إذا تغيرت  $س$  من ٣ إلى ٤ يساوي .....

[ أ ١ ب ٢ ج ٣ د ٤ ]

٢) قيمة دالة التغير للدالة  $(س) = ٢س + ١$  إذا كان التغير في  $س = ٢$  .

عندما  $س = ١$  يساوي ..... [ أ ٢٢ ب ٤٤ ج ٤١ د ٢٢ ]

٣) قيمة دالة التغير للدالة  $(س) = ٢س + ١$  عندما  $س = ٣$  عندما  $س = ٢$  .

$\Delta س = ١$  يساوي ..... [ أ  $\frac{1}{2}$  ب  $\frac{2}{3}$  ج ٥ د ٥ ]

٤) إذا كان  $(س) = ٢س - ١$  ودالة التغير عندما  $س = ٢$  فإن:

أولاً  $ت(١) = \dots\dots\dots$  [ أ ١١ ب ١٠ ج ٩ د ١٢ ]

ثانياً  $ت(-١) = \dots\dots\dots$  [ أ ٢٠ ب ٢٠٠ ج ٢٠٥ د ٢٠٥ ]

٥) إذا كانت  $(س) = ٢س + ١$  فإن التغير في  $س$  عندما:

١) تتغير  $س$  من ٢ إلى ٣ يساوي ..... [ أ ١ ب ١٠ ج ١٠٠ د ١٠١ ]

٢)  $س = ٢$  عندما  $س = ١$  يساوي ..... [ أ ١ ب ١٠ ج ١٠٠ د ١٠١ ]



١ إذا كان  $d = (س)$   $س = 3 - 2$  أوجد دالة التعبير ثم أوجد متوسط التغير عندما تتغير  $س$  من ٢ إلى ٢.٥ ثم أوجد معدل التغير عندما  $س = 2$   
[٣٠, ٣٠, ٣٠]

٢ اختر إجابة صحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١ إذا كان  $d = (س)$   $س = 3 + 2$  فإن  $d = (٠, ٥)$  ..... عندما  $س = 2$   
[١٠, ٧٥ -] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

٢ إذا كان  $d = (س)$   $س = 3 - 2$  فإن  $d = (٠, ٣)$  .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

٣ إذا كان متوسط التغير في  $d = 2,4$  عندما تتغير  $س$  من ٣ إلى ٣.٢ فإن التغير في  $d$  يساوي .....  
[١٠, ٣٢] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

٤ متوسط تغير الدالة  $d$  حيث  $d = (س)$   $س = 3 + 2$  عندما تتغير  $س$  من ١ إلى ٣ يساوي .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

٥ إذا كان متوسط التغير في  $d = -1,4$  عندما تتغير  $س$  من ٢.٤ إلى ٢ فإن التغير في  $d$  يساوي .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

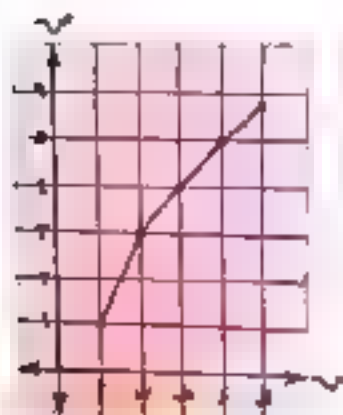
٦ إذا كان متوسط التغير في  $d = 5$  عندما تتغير  $س$  من ٧ إلى ٤.٤  $d = (٢)$  فإن  $d = (٤)$  تساوي .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

٧ متوسط التغير في محيط مربع طول ضلعه  $س$  يساوي .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

٨ متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٥ إلى ٧ يساوي .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

٩ متوسط التغير في مساحة مربع عندما يتغير طول ضلعه من ٢ إلى ٣ يساوي .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]

١٠ يوضح الشكل المقابل منحنى الدالة  $d$  حيث  $س = d$  في أي الفترات يكون متوسط التغير في  $d$  هو الأكبر .....  
[١٠, ٦] [٢, ٢٥] [١, ٧٥] [١٦, ٢٥]



[١, ٢] [٢, ٤] [٣, ٦] [٤, ٨]



مسائل المستوى الثاني

107 أوجد متوسط التغير للدالة  $y = (x - 2)^2 + 3$  حيث  $x = 2$  وذلك عندما تتغير  $x$  من 2 إلى 2.1 ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عند  $x = 2$

[107]

108 إذا كانت  $y = (x - 2)^2 + 3$  أوجد دالة متوسط التغير للدالة ثم أوجد متوسط التغير عندما تتغير  $x$  من 2 إلى 2.1 ثم أوجد معدل التغير عندما  $x = 2$

[108]

109 أوجد متوسط تغير الدالة  $y = x^2 - 2x + 2$  عندما تتغير  $x$  من 2 إلى 2.1 ثم احسب معدل التغير في هذه الدالة عندما  $x = 2$

[109]

110 أوجد متوسط تغير الدالة  $y = x^2 - 2$  عندما تتغير  $x$  من 2 إلى 2.1 واحسب معدل تغيرها عند  $x = 2$

[110]

111 أوجد دالة متوسط التغير للدالة  $y = \frac{1}{x}$  حيث  $x = \frac{1}{3}$  ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عندما  $x = \frac{1}{3}$

[111]

112 إذا كانت دالة حيث  $y = \frac{1}{x} + 1$  فأوجد دالة متوسط التغير للدالة

[112]

113 أوجد دالة متوسط التغير للدالة  $y = \frac{2}{x - 1}$  حيث  $x = 1$  ثم احسب معدل التغير عندما  $x = 1$

[113]

114 أوجد دالة متوسط التغير للدالة  $y = \frac{1}{x} - 1$  حيث  $x = 1$  ثم احسب معدل التغير في الدالة عندما  $x = 1$

[114]

115 أوجد دالة متوسط التغير في  $y = \frac{1 + x}{1 - x}$  حيث  $x = 1$  ثم احسب معدل التغير عندما  $x = 1$

[115]

116 أوجد دالة متوسط التغير للدالة  $y = x^2 - 3$  عندما  $x = 3$  ثم احسب معدل التغير لهذه الدالة عندما  $x = 3$

[116]

117 إذا كانت  $y = x^2 + 1$  فأوجد دالة التغير في  $y$  عندما  $x = 1$  وإذا كانت  $y = (x - 1)^2 + 2$  عندما  $x = 1$  فأوجد قيمتي  $y$

[117]

118 إذا كانت  $y = x^2 + 1$  فأوجد دالة التغير في  $y$  عندما  $x = 1$  وإذا كانت  $y = (x - 1)^2 + 2$  عندما  $x = 1$  فأوجد قيمتي  $y$

[118]



١٤٦ إذا كانت د (س) = س<sup>١</sup> + س - ٢ فأوجد دالة التغير ت (و) عندما س = ٢

ولذا كانت  $\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{19}{4}$  فأوجد قيمة ١

[١٤]

١٤٧ إذا كانت المسافة في التي تقطعها حشرة خلال زمن قدره ١ ثانية يعطى بالعلاقة

$$١٤٨ \quad ٢٠ - ٣ + ٢ = ٢ \text{ فأوجد متوسط التغير في المسافة عندما تتغير } ١ \text{ من } ٢ = ٢$$

(١) ثم أحسب معدل التغير في عندما ١ = ٢

[١٤٢]

١٤٩ صفيحة دائرية الشكل عند تصغيرها تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها

أوجد معدل تغير مساحتها عندما يكون طول نصف قطرها ٤

[٢٨]

١٥٠ سطح حجر من ماء ساخن فتكون موجة دائرية ترداد بانتظام بحيث يظل

محتفظه بشكلها الدائري أحسب متوسط التغير في مساحة سطحها عندما يزداد

طول نصف قطرها من ٣ (١) ٣,١ ثم أوجد معدل التغير عندما يكون طول نصف

قطرها ٣,٥  $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

[٢٢٠ - ١١١]

١٥١ صفيحة مربعة الشكل تتمدد بانتظام بحيث تحتفظ بشكلها أوجد دالة

متوسط التغير في مساحة سطح الصفيحة عندما يتغير طول ضلعها من ٣ (١) ٣ + و

ومنه أحسب معدل التغير في المساحة عندما يكون طول الضلع ٨

[١٩]

١٥٢ مكعب يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله أحسب متوسط التغير في مساحته

الكلية وذلك عندما يتغير طول حرفه من ٣ (١) ٣,٢ ثم أحسب معدل تغير

مساحته الكلية عندما يكون طول حرفه ٣

[٣٧٠ - ٣٧٠]

١٥٣ كرة من المعدن تتمدد بالتسخين محتفظة بشكلها الكروي فأوجد معدل التغير في

حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٧

[٢٠١٣]

١٥٤ قفاعة من الصابون كروية الشكل تتمدد محافظة على شكلها الكروي أحسب متوسط

التغير في مساحة سطحها الكروي عندما يتغير طول نصف قطرها من ٥,٥ (١) ٥,٦

علما بأن مساحة سطح الكرة تساوي  $4\pi r^2$  حيث  $r$  طول نصف قطر الكرة.

[٢١٠٤]

١٥٥ إذا كانت الكمية من (مقاسة بالكيلوجرام) التي تبنيها شجرة برتقال متوسطة الإنتاج

يؤلف على عدد كيلوجرامات س من المبيد الحشري المستخدم لرش الشجرة طبقاً للعلاقة:

$$\text{س} = ١٠٠ - \frac{47}{١ + \text{س}} \text{ أحسب متوسط التغير في س عندما تتغير س من } ١ \text{ إلى } ٢$$

[١٧]



٢٦ (٢٤) صحيحة على شكل مثلث طول قاعدتها يساوي ضعف ارتفاعها الماظر لتمدد بالحرارة محافظة على شكلها أحسب متوسط التغير في مساحتها إذا تغير ارتفاعها من ٨ إلى ٨.٥

٢٧ (٢٥) مستطيل طوله ضعف عرضه يتمدد بانتظام بحيث يظل محتفظاً بشكله وينقص النسبة بين أبعاده، أحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يكون عرضه ٥ وأحسب معدل التغير في مساحة سطحه عندما يتغير طوله من ١٠ إلى ١١

٢٨ آخر، إجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كانت  $d = f(s)$  فإن معدل تغير الدالة  $d$  عندما  $s = ١$  يساوي .....

[١] [١٥] [١٠] [١٢] [١٥]

٢ إذا كانت  $d = f(s)$  فإن معدل تغير الدالة  $d$  عندما  $s = \frac{\pi}{4}$  يساوي .....

[١] [١] [١] [١] [١]

٣ إذا كانت  $d = f(s)$  فإن معدل تغير الدالة  $d$  عندما  $s = \frac{\pi}{4}$  يساوي .....

[١] [١] [١] [١] [١]

٤ إذا كانت  $d = f(s)$  فإن  $f'(s) = \frac{d}{ds} f(s)$  يساوي .....

[١] [١] [١] [١] [١]

٥ إذا كانت  $d = f(s)$  فإن  $f'(s) = \frac{d}{ds} f(s)$  يساوي .....

[١] [١] [١] [١] [١]

٦ إذا كانت  $d = f(s)$  فإن  $f'(s) = \frac{d}{ds} f(s)$  يساوي .....

[١] [١] [١] [١] [١]

٧ (٢٦) بوضح الشكل المقابل المنحنى  $y = f(x)$  حيث  $y$  جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الحثيات،  $x$  الزمن مقدراً بالشهور.

من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

[١] [١] [١] [١] [١]

٨ (٢٧) بوضح الشكل المقابل المنحنى  $y = f(x)$  حيث  $y$  جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الحثيات،  $x$  الزمن مقدراً بالشهور.

من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

[١] [١] [١] [١] [١]

٩ (٢٨) بوضح الشكل المقابل المنحنى  $y = f(x)$  حيث  $y$  جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الحثيات،  $x$  الزمن مقدراً بالشهور.

من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

[١] [١] [١] [١] [١]

١٠ (٢٩) بوضح الشكل المقابل المنحنى  $y = f(x)$  حيث  $y$  جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الحثيات،  $x$  الزمن مقدراً بالشهور.

من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

[١] [١] [١] [١] [١]

١١ (٣٠) بوضح الشكل المقابل المنحنى  $y = f(x)$  حيث  $y$  جملة مبيعات أحد منافذ بيع أجهزة الحاسب الآلي مقدراً بملايين الحثيات،  $x$  الزمن مقدراً بالشهور.

من الرسم متوسط التغير في جملة المبيعات عندما يتغير الزمن من:

[١] [١] [١] [١] [١]



أولاً  $u = 8$  إلى  $u = 8$  يساوي

$$[-8, 8] \quad [-8, 8] \quad [-8, 8] \quad [-8, 8]$$

ثانياً  $u = 8$  إلى  $u = 10$  يساوي .....

$$[-12, 12] \quad [-12, 12] \quad [-12, 12] \quad [-12, 12]$$

ثالثاً  $u = 8$  إلى  $u = 12$  يساوي [صفر إلى 1]  $[-12, 12]$

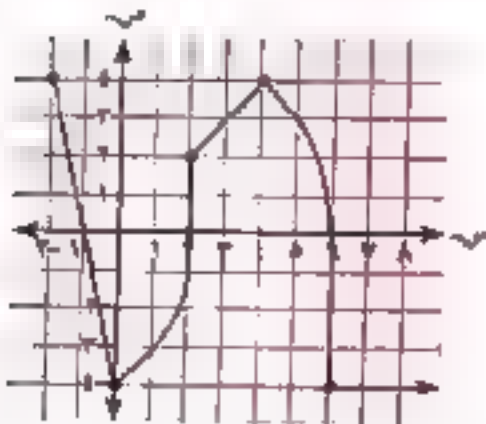
$$⑧ \text{ إذا كانت الدالة } d(s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s > 2 \\ 3 - s & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases} \text{ فإن:}$$

أولاً متوسط تغير الدالة عندما يتغير  $s$  من 2 إلى 12 يساوي .....

$$[1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1]$$

ثانياً معدل تغير الدالة عندما  $s = 1$  يساوي .....

$$[1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1] \quad [1, 1]$$



### مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

في الشكل المقابل ،

ممحس الدالة  $d$  حيث  $s = d(s)$   
حدد الفترات التي يكون فيها متوسط  
التغير في  $d$  ثابتاً وفسر إجابتك

صفحة رقيقة على شكل مثلث متساوي الأضلاع لتمدد بانتظام بحيث تظل محتفظة

بشكلها. أوجد متوسط التغير في مساحة الصفحة عندما يتغير طول ضلعها من ١.٥ سم

إلى ٢.٥ سم (٣٦)

مثلث متساوي الأضلاع أحسب متوسط تغير مساحة سطحه عندما يتغير طول ضلعه

من ٣.٨ إلى ٤.٠ (٣٧)

صفحة من المعدن على شكل مربع تتعرض للحرارة فتتمدد محتفظة بشكلها أحسب

التغير في طول ضلعها عندما تتغير المساحة بمقدار ٩ سم<sup>٢</sup> بدءاً من اللحظة التي يكون

فيها طول الضلع ٤ سم (٣٨)





## الإشتقاق

## الحد الثاني

٢

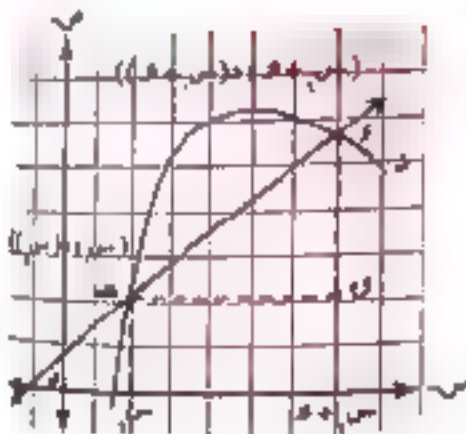
في الشكل المقابل،

منحنى  $d$  :  $||a||$  حيث  $s = d(s)$ ،

$\vec{r}$  قاطعاً له في النقطتين  $(s_1, d(s_1))$

$(s_1 + h, d(s_1 + h))$

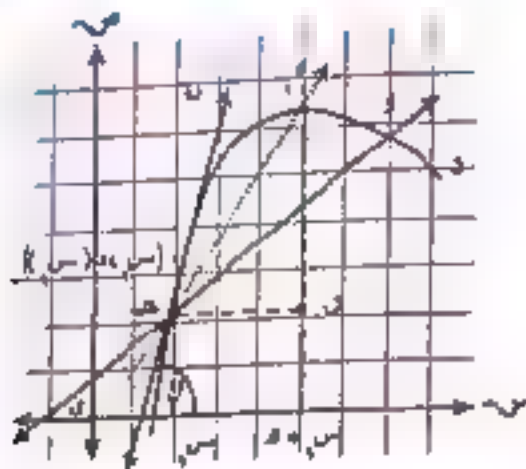
فإن ميل  $\vec{r} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السيمات}}$



$$\frac{d(s_1 + h) - d(s_1)}{s_1 + h - s_1} = \frac{d(s_1 + h) - d(s_1)}{h}$$

ويكون ميل القاطع  $\vec{r} = \frac{d(s_1 + h) - d(s_1)}{h} = m$  (دالة متوسط التغير)





إذا كانت النقطة  $(s, d(s))$  نقطة ثابتة على منحنى الدالة وتحركت النقطة  $s$  على المنحنى بحيث تقترب من النقطة  $s$  ليأخذ  $h$  الوضع  $h \rightarrow 0$  ويصبح مماساً للمنحنى عند  $s$  أي أن  $h \rightarrow 0$  صفر فإن ميل المماس عند  $s$  =  $\frac{d(s) - d(s-h)}{h}$  إن وجدت

أي أن ميل المماس لمنحنى الدالة  $d$  حيث  $s = d(s)$  عند النقطة  $(s, d(s))$  يساوي معدل التغير في  $d$  عند  $s = s$

### المشتقة الأولى

لكل قيمة للمتغير  $s$  في مجال  $d$  يباظرها قيمة وحيدة لمعدل التغير في  $d$  وعلى هذا فإن معدل التغير هو دالة أيضاً في المتغير  $s$  يطلق عليها «الدالة المشتقة» أو «المشتقة الأولى للدالة» أو «المعامل التفاضلي الأول» ويمكن تعريفها كما يلي

#### تعريف

إذا كانت  $d: [a, b] \rightarrow [c, e]$  فليكن

$$\frac{d(s) - d(s-h)}{h} = d'(s) \quad \text{الدالة المشتقة } d' = d'(s)$$

بشرط أن تكون هذه النهاية موجودة

### رموز المشتقة الأولى

إذا كانت  $s = d(s)$  فيرمز للمشتقة الأولى للدالة  $d$  بأحد الرموز

ونقرأ «مشتقة  $s$ » أو «مشتقة  $d$ »

من  $d'$

ونقرأ «دال  $s$  دال  $s$ » أو «مشتقة  $s$  بالنسبة إلى  $s$ »

$\frac{d}{ds}$



مثال

ميل المماس لمنحنى  $D = (S)$  عند النقطة  $(S_1, D(S_1))$  هو  $D'(S_1)$

فمثلاً

لإيجاد الدالة المشتقة للدالة  $D$  أو ميل المماس لمنحنى الدالة  $D$  حيث  $D = (S)$   $S_1 = 1$  عند النقطة  $(1, D(1))$  فإن ميل المماس عند  $(S_1 = 1) =$  المشتقة الأولى للدالة عند  $(S_1 = 1)$

$$= \text{معدل التغير في } D \text{ عند } (S_1 = 1) = \frac{D(S_1) - D(S_1 + 1)}{S_1 - (S_1 + 1)}$$

$$= \frac{D(S_1) - D(S_1 + 1)}{S_1 - (S_1 + 1)} = \frac{D(1) - D(1 + 1)}{1 - (1 + 1)} = \frac{D(1) - D(2)}{-1}$$

$$= \frac{D(1) - D(2)}{-1} = \frac{D(2) - D(1)}{1} = \frac{D(2) - D(1)}{1}$$

مثال

أوجد الدالة المشتقة للدالة  $D$  حيث  $D = (S)$   $S_1 = 1$   $S_2 = 2$   $S_3 = 3$  مستخدماً تعريف المشتقة ثم اوجد ميل المماس لمنحنى  $D$  عند النقطة  $(1, D(1))$

الحل

$$D = (S) = S_1 + S_2 + S_3$$

$$D(S_1) = (S_1 + S_2 + S_3) = (1 + 2 + 3) = 6$$

$$D(S_1 + 1) = (S_1 + 1 + S_2 + S_3) = (1 + 1 + 2 + 3) = 7$$

$$D(S_1) - D(S_1 + 1) = 6 - 7 = -1$$

$$S_1 - (S_1 + 1) = 1 - (1 + 1) = -1$$

$$D(S_1) - D(S_1 + 1) = -1$$

$$D'(S_1) = \frac{D(S_1) - D(S_1 + 1)}{S_1 - (S_1 + 1)} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$D'(S_1) = \frac{D(S_1) - D(S_1 + 1)}{S_1 - (S_1 + 1)} = \frac{D(1) - D(2)}{1 - (1 + 1)} = \frac{6 - 7}{1 - 2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$D'(S_1) = 1 = 1 + 2 + 3 = 6$$

∴ النقطة  $(1, D(1))$  تقع على المنحنى  $D$

$$∴ \text{ميل المماس عند النقطة } (1, D(1)) = D'(S_1) = 1 = 1 + 2 + 3 = 6$$



## مثال

أوجد مستخدماً التعريف الدالة المشتقة لكل من السؤال الآتية:

$$\textcircled{1} \quad d(س) = \sqrt{3-س} \quad \textcircled{2} \quad d(س) = \frac{1}{س+2}$$

## الحل

$$\textcircled{1} \quad d(س) = \sqrt{3-س} \quad \therefore d(س+2) = \sqrt{3-س+2}$$

$$d(س+2) - d(س) = \sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}$$

$$\therefore d'(س) = \frac{d(س+2) - d(س)}{2} = \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{2}$$

$$\therefore d'(س) = \frac{d(س+2) - d(س)}{2} = \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2}}{\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2}} \times \frac{\sqrt{3-س+2} - \sqrt{3-س+2}}{2} = \frac{2-3+س}{2(\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2})}$$

(المرافق)

$$= \frac{2-3+س}{2(\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2})} = \frac{س-1}{2(\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2})}$$

$$= \frac{س-1}{2(\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2})} = \frac{س-1}{2(\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2})}$$

$$= \frac{س-1}{2(\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2})} = \frac{س-1}{2(\sqrt{3-س+2} + \sqrt{3-س+2})}$$

$$\frac{1}{2-س} = \frac{2}{2-س} = \frac{2}{2-س+2-س} = \frac{2}{2-س+2-س}$$

$$\therefore d'(س) = \frac{1}{2-س}, \quad \frac{2}{2-س} < 2$$

$$\textcircled{2} \quad d(س) = \frac{1}{س+2} \quad \therefore d(س+2) = \frac{1}{س+2+2} = \frac{1}{س+4}$$

$$\therefore d(س+2) = \frac{1}{س+4}$$

$$\therefore d(س) = \frac{1}{س+2}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2+s} - \frac{1}{2+d+s} &= (s) \cdot d - (d+s) \cdot d \\ \frac{d-}{(2+s)(2+d+s)} &= \frac{2-d-s-2+s}{(2+s)(2+d+s)} = \\ &= \frac{(s) \cdot d - (d+s) \cdot d}{d} \\ \therefore d'(s) &= \frac{1}{1-d} = \frac{1}{d} \cdot \frac{d-}{(2+s)(2+d+s)} \times \frac{1}{d} \\ &= \frac{1-}{(2+s)(2+d+s)} \\ \therefore d'(s) &= \frac{1-}{2(2+s)} \end{aligned}$$

### مثال ٣

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة  $d$  حيث  $d(s) = s^3 + 1$  عند النقطة  $(1, 2)$   
ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها هذا المماس مع الاتجاه الموجب  
لمحاور السينات عند النقطة

### الحل

$$\begin{aligned} d(s) &= s^3 + 1 \quad d(1) = 1 + 1 = 2 \\ \therefore \text{النقطة } (1, 2) &\in \text{ للمنحنى } d \\ \text{ميل المماس عند } (s=1) &= \text{معدل التغير في } d \text{ عند } (s=1) \\ &= \frac{d(1) - (d+1)}{d} = \frac{2 - (1+1)}{1} = 0 \\ \therefore \text{ميل المماس} &= \frac{d - [1 + (d+1)]}{d} = \frac{1 - (d+1)}{d} = \frac{1 - d - 1}{d} = \frac{-d}{d} = -1 \\ &= \frac{1 - (d+1)}{d} = \frac{1 - d - 1}{d} = \frac{-d}{d} = -1 \\ \therefore \text{ميل المماس} &= \frac{1 - (d+1)}{d} = \frac{1 - d - 1}{d} = \frac{-d}{d} = -1 \\ \therefore \text{ميل المماس} &= \frac{1 - (d+1)}{d} = \frac{1 - d - 1}{d} = \frac{-d}{d} = -1 \end{aligned}$$

$\therefore \text{ميل المماس} = -1$

$$\therefore \text{ميل المماس} = -1$$



## مثال

إذا كان  $d = f(s) = 2 - 3s$  حيث  $f$  ثابت أوجد .

① المشتقة الأولى للدالة  $d$  عند أي نقطة  $(s, d)$

② قيمة  $f$  إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند  $s = 1$  يساوي 9

## الحل

$$① \because d = f(s) = 2 - 3s \quad \therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$\therefore d' = (f(s))' = -3$$

$$② \because \text{ميل المماس} = d' = -3 = 9 \quad \text{عندما } s = 1$$

$$\therefore f(1) = 2 - 3(1) = -1$$

$$\therefore f(1) = -1$$

$$\therefore f(1) = -1$$

## مثال

إذا كان  $d = f(s) = 2 - 3s$  حيث  $f$  ثابت أوجد .

① المشتقة الأولى للدالة  $d$  عند أي نقطة  $(s, d)$

② قيمتي  $s, d$  إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة  $(-1, -2)$

الواقعة عليه يساوي 1

## الحل

$$\therefore d = f(s) = 2 - 3s$$



$$\begin{aligned} \therefore d(s+h) &= (s+h)^2 + b(s+h) \\ &= s^2 + 2sh + h^2 + bs + bh \\ d(s+h) - d(s) &= (s+h)^2 + b(s+h) - s^2 - bs \\ &= 2sh + h^2 + bh \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d(s+h) - d(s)}{h} = \frac{2sh + h^2 + bh}{h} = 2s + h + b$$

إذا كان ميل المماس  $d'(s) = 1$  عند  $s = 1$

$$2 + 1 + b = 1$$

$$\textcircled{1} \quad 2 + 1 + b = 1$$

$$\therefore d(1-h) = 2 - (1-h) = 1 + h$$

$$d(s) = s^2 + b$$

$$d(1-h) = (1-h)^2 + b = 1 - 2h + h^2 + b$$

$$\textcircled{2} \quad 1 - 2h + h^2 + b = 1 + h$$

من ①، ② بالجمع

$$1 - 2h + h^2 + b + 1 + h = 1 + h + 1 - 2h + h^2 + b$$

بالتعويض في ①

$$1 = 1 + 1 - 2h + h^2 + b$$

$$\therefore 1 = 1 + b$$

$$b = 0$$

$$1 = 1 + 1 \times 2 - \dots$$

$$\therefore b = 0$$

### ⑤ طريقة لحساب المشتقات باستخدام النهايات

يقال أن الدالة  $d$  قابلة للاشتقاق عند  $s = a$  (حيث  $a$  تنتمي إلى مجال الدالة)

$$\text{إذا وفقط إذا كانت } d'(a) \text{ لها وجود حيث } d'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(a+h) - d(a)}{h}$$

وإذا وجدت مشتقة للدالة  $d$  عند كل نقطة تنتمي إلى الفترة  $[a, b]$ ، و نقول أن الدالة  $d$  قابلة للاشتقاق في هذه الفترة ولذلك فإن الدالة كثيرة الحدود تكون قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$



### 3. المشتقة اليمينية والمشتقة اليسرى

إذا كانت الدالة  $D$  معرفة عند  $s = a$  (حيث  $a$  تنتمي إلى مجال الدالة) وكانت قاعدة الدالة على يمين  $a$  تختلف عن قاعدتها على يسار  $a$  فتبحث عن قابلية الاشتقاق عند  $s = a$  بأن نوجد المشتقة اليمينية للدالة ويرمز لها بـ  $(D^+)_a$  والمشتقة اليسرى ويرمز لها بـ  $(D^-)_a$  حيث:

$$(D^+)_a = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{D(a+h) - D(a)}{h}$$

$$(D^-)_a = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{D(a+h) - D(a)}{h}$$

وتكون الدالة  $D$  قابلة للاشتقاق عند  $a$  إذا فقط إذا كان  $(D^+)_a = (D^-)_a$  ويرمز لمشتقة الدالة بالرمز  $D'(a)$

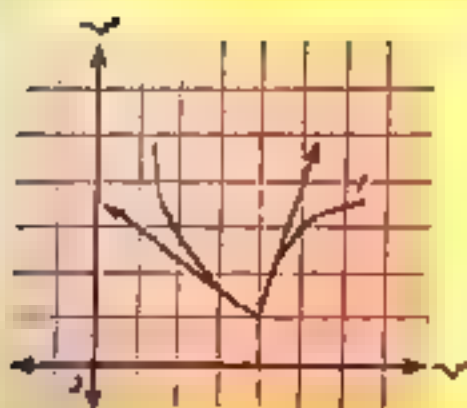
### 4. الاشتقاق والتصلب

#### تعريف

إذا كانت الدالة  $D$  حيث  $s = a$  قابلة للاشتقاق عند  $s = a$  فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

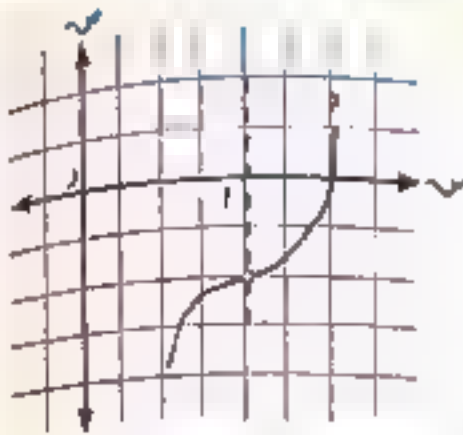
#### ملاحظة

1. اتصال دالة عند نقطة لا يعني بالضرورة أنها قابلة للاشتقاق عند نفس النقطة.  
فمثلاً



الدالة  $f$  متصلة عند  $a$   
ولكن ميل المماس الأول (المشتقة اليمينية)  $\neq$  ميل المماس الثاني (المشتقة اليسرى)  
 $\therefore$  الدالة غير قابلة للاشتقاق عند  $s = a$





٢٢ إذا كانت الدالة غير متصلة عند  $x = 1$

فإن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$

فمثلاً

الدالة  $f$  غير متصلة عند  $x = 1$

لأن الدالة غير معرفة عند  $x = 1$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$

٢٣ عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة في مجالها يفضل بحث إتصالها عند هذه النقطة أولاً.

فإذا كانت  $f$  متصلة نبحث الاشتقاق.

فإذا كانت  $f$  غير متصلة فالدالة غير قابلة للاشتقاق.

## مثال

اثبت أن  $f(x) = x^2 - 3x + 1$  قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$

## الحل

∴ مجال  $f = \mathbb{R}$

∴  $f(x)$  كثيرة حدود

$$f(1) = 1^2 - 3(1) + 1 = -1$$

∴  $f$  معرفة عند  $x = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 3(1+h) + 1 - (-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 3 - 3h + 1 - (-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-1) = -1$$

∴  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$



مثال

أثبت أن د (س) =  $\frac{1}{2-s}$  قابلة للإشتقاق عند س = 4

الحل

لايجاد مجال الدالة نضع مقام = 0

$$\therefore 2-s=0 \quad \therefore s=2 \quad \therefore \text{مجال د} = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\therefore \text{د معرفة عند س} = 4$$

$$\therefore \text{د (4)} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{د (4)} = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{د (4)} = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-4} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$  د قابلة للإشتقاق عند س = 4

مثال

أثبت قابلية الإشتقاق للدالة د عند س = 1 حيث

$$\text{د (س)} = \begin{cases} 3+s & \text{عندما س} \leq 1 \\ 2-s & \text{عندما س} > 1 \end{cases}$$

الحل

$$\therefore \text{الدالة معرفة عند س} = 1$$

$$\therefore \text{مجال د} = \mathbb{R}$$

$$\therefore \text{د (1)} = 3+1 = 4$$

$$\text{المشتقة اليمنى} = \text{د (1)} = \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$\frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-1} = 1 \quad \text{هنا} \quad \frac{1}{2-s} = \frac{1}{2-1} = 1$$



$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d - (d+1)}{d} \right) = d'(-1) =$$

$$= \frac{d - [(d+1) - 1]}{d} =$$

$$= \frac{d - [d + 1 - 1]}{d} = \frac{d - d}{d} =$$

$$= \frac{0}{d} = 0$$

∴ النهاية غير موجودة  
∴ الدالة د غير قابلة للاشتقاق عند  $s = 1$   
∴ المشتقة اليسرى غير موجودة

### مثال

أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د عند  $s = 2$  حيث

$$d(s) = \begin{cases} 4 - s & \text{عندما } s \leq 2 \\ s^2 - 5 & \text{عندما } s > 2 \end{cases}$$

### الحل

∴ مجال د =  $\mathbb{R}$

∴ الدالة معرفة عند  $s = 2$

$$d(2) = 4 - 2 \times 2 = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d - (d+2)}{d} \right) = d'(2) =$$

$$= \frac{d - [(d+2) - 2]}{d} =$$

$$= \frac{d - [d + 2 - 2]}{d} = \frac{d - d}{d} =$$

$$= \frac{0}{d} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{d - (d+2)}{d} \right) = d'(-2) =$$

$$= \frac{d - [(d+2) - 2]}{d} =$$





$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} (x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} \right) = \frac{d}{dx} (x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-1}) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$

### مثال ١

أبحث قابلية اشتقاق الدالة  $f(x) = |x - 2|$  عند  $x = 2$

### الحل

$$f(x) = |x - 2|$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{عندما } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{عندما } x < 2 \end{cases}$$

∴ مجال  $D = \mathbb{R}$

∴ الدالة معرفة عند  $x = 2$  و  $f(2) = 0$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x - 2) = 1 \quad \text{عندما } x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (2 - x) = -1 \quad \text{عندما } x < 2$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (x - 2) = 1 \quad \text{عندما } x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} (2 - x) = -1 \quad \text{عندما } x < 2$$

$$\therefore f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{عندما } x \geq 2 \\ -1 & \text{عندما } x < 2 \end{cases}$$

∴ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند  $x = 2$



### مثال ١١

أبحث قابلية اشتقاق الدالة  $D$  حيث:

$$D(s) = \begin{cases} s^3 + 2 & \text{عندما } s \leq 1 \\ s^2 - 1 & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$$

### الحل

$$D(1) = 1^3 + 2 = 3$$

$$\text{النهاية اليمنى} = D(+1) = \lim_{s \rightarrow 1^+} (s^3 + 2) = 3$$

$$\text{النهاية اليسرى} = D(-1) = \lim_{s \rightarrow 1^-} (s^2 - 1) = 0$$

$$D(+1) \neq D(-1)$$

$\therefore$  الدالة غير متصلة عند  $s = 1$

$\therefore$  الدالة  $D$  غير قابلة للاشتقاق عند  $s = 1$

### مثال ١٢

$$D(s) = \begin{cases} s^2 - 1 & \text{عندما } s < 1 \\ 2 - s & \text{عندما } s \geq 1 \end{cases}$$

قابلية الاشتقاق عند  $s = 1$  فأوجد قيمة  $D$

### الحل

$\therefore$  الدالة  $D$  قابلة للاشتقاق عند  $s = 1$

$\therefore$  الدالة  $D$  متصلة عند  $s = 1$

$\therefore$  النهاية اليمنى للدالة  $D =$  النهاية اليسرى للدالة  $D$

$$\therefore \lim_{s \rightarrow 1^+} (2 - s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} (s^2 - 1)$$

$$2 - 1 = 1^2 - 1$$

$$1 = 1 \quad \text{صفر} = 2 - 1 = 1$$

$$1 = 1$$



الصفحة ٤٤٣

اسألني عما  
عنده ولا عما  
عند غارتك  
بموتك

راجع معنا واختر لنفسك

اختبار اركمى

١٠



### ١) أجب عن الأسئلة الآتية :

- ١) إذا كان متوسط التغير في د = ١,٢ عندما تتغير س من ٢ إلى ٢,٣ فإن التغير في د يساوي ..... [ ١,٢ | ٣,٦ | ٣,٦ | ٣٩ ]
- ٢) إذا كان متوسط التغير في د = ٤ عندما تتغير س من ١ إلى ٤,٣ د (١) = ٦ فإن د (٣) = ..... [ ٤ | ٧ | ٨ | ١٤ ]
- ٣) متوسط التغير في حجم مكعب عندما يتغير طول حرفه من ٤ إلى ٦ يساوي ..... [ ١٥٢ | ٧٦ | ٣٨ | ١٩ ]
- ٤) متوسط تغير الدالة د حيث د (س) = س<sup>٢</sup> + ٢ س عندما تتغير س من ١ إلى ٣ يساوي ..... [ صفر | ١٢ | ١٥ | ٦ ]

٥) أوجد معدل تغير الدالة د حيث د (س) = س +  $\frac{1}{س}$  عند س = ٢

٦) إذا كانت د (س) = س<sup>٢</sup> - س + ١ فأوجد دالة التغير عند س = ٣ ثم احسب د (-٣,٠)



# مسائل المستوى الأول

أكثر إجابة صحيحة من بين الإجابات المعطاة

١ ميل المماس لمنحنى الدالة  $D$  حيث  $x = D(x)$  عند  $x = 1$  يساوي معدل

في  $x = 1$  عند  $x = 1$

[متوسط التغير] دالة التغير  $D$  معدل التغير  $D'$  التغير

٢ المشتقة الأولى لدالة  $D(x) = 1$  عند  $x = 1$  تساوي .....

$$\left[ \frac{D(1) - D(0)}{1 - 0} \text{ و } \frac{D(2) - D(1)}{2 - 1} \right]$$

$$\left[ \frac{D(1) - D(0)}{1 - 0} \text{ و } \frac{D(0) - D(-1)}{0 - (-1)} \right]$$

٣ مشتقة الدالة  $D(x) = x^2$  عند  $x = 1$  تساوي .....

$$[2 - \text{ و } 1 - \text{ و } 2 - \text{ و } 1 -]$$

٤ مشتقة الدالة  $D(x) = x^2$  عند  $x = 1$  هي .....

$$[2 - \text{ و } 1 - \text{ و } 2 - \text{ و } 1 -]$$

٥ الدالة  $D$  تكون قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$   $\Leftrightarrow$  مجال الدالة إذا كانت .....

[ $D(1)$  لها وجود  $D'(1)$  لها وجود  $D'(1)$  ثابت  $D'(1)$  ليس لها وجود]

٦ إذا كانت الدالة  $D$  قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$  فإنها تكون ..... عند  $x = 1$

[ $D'(1)$  غير معرفة  $D'(1)$  متصلة  $D'(1)$  غير متصلة  $D(x)$  غير متصلة]

٧ إذا كانت الدالة  $D$  حيث  $D(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{عندما } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{عندما } x \leq 2 \end{cases}$

$$D(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{عندما } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{عندما } x \leq 2 \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند  $x = 2$  فإن  $2 = \dots\dots\dots = [1 - \text{ و } 1 - \text{ و } 2 - \text{ و } 1 -]$

٨ إذا كانت الدالة  $D$  حيث  $D(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{عندما } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{عندما } x \leq 2 \end{cases}$

$$D(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{عندما } x > 2 \\ x^2 + 1 & \text{عندما } x \leq 2 \end{cases}$$

قابلة للاشتقاق عند  $x = 2$  فإن  $2 = \dots\dots\dots = [1 - \text{ و } 1 - \text{ و } 2 - \text{ و } 1 -]$

$$[2 - \text{ و } 1 - \text{ و } 2 - \text{ و } 1 -]$$



① إذا كانت الدالة د حيث د:

$$D(s) = \begin{cases} s^2 + s - 6 & \text{عندما } s \leq 2 \\ s^2 + 2s & \text{عندما } s > 2 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند  $s = 2$  فإن  $2 - 6 = -4 = \dots$

[1- د 3 د 10- د 10]

② أوجد الدالة المشتقة للدالة د حيث  $D(s) = s^2 - s + 1$  استخدمنا تعريف المشتقة ثم أوجد ميل المماس عند النقطة  $(-2, 7)$

[10-]

③ أوجد مشتقة الدالة د حيث  $D(s) = s^3 + 4$  ثم أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة  $(-3, -4)$  الواقعة عليه.

[3-]

④ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

$$① \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s \geq 1 \\ s^2 + 2 & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند  $s = 1$  فإن  $1 = \dots$  [1 د 2 د 3 د 4]

$$② \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s \leq 1 \\ s^2 - 3 & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند  $s = 1$  فإن  $1 = \dots$  [1 د 2 د 3 د 4]

$$③ \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s - 1 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s^2 - 3 & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

حيث  $1, 2$  ثابتان فإذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند  $s = 2$

فإن  $2 - 1 = 1 = \dots$  [1 د 2 د 3 د 4]

$$④ \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s + 1 & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند  $s = 2$  فإن  $2 + 1 = 3 = \dots$  [4 د 1- د 8 د 8-]

$$⑤ \text{ إذا كانت الدالة: } D(s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

قابلة للإشتقاق عند  $s = 2$  فإن  $2' (2) = \dots$  [1 د 2 د 1 د 8]



مسائل المستوى الثاني

١٠- أوجد مشتقة الدالة باستخدام تعريف

المشتقة ثم أوجد ميل المماس لمنحنى وعند النقطة (١، ١)

١١- أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة وحيث (س) = س<sup>٢</sup> - س عند س = ٣

١٢- وبين المعنى الهندسي لمشتقة الدالة عند س = ٢

١٣- أوجد باستخدام تعريف مشتقة الدالة وحيث (س) = س<sup>٢</sup> + س عند س = ١ ثم

أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها هذا المماس مع الإحداثيات الموجبة لمحور السينات لأقرب درجة.

١٤- أوجد باستخدام التعريف مشتقة الدالة وحيث (س) = س<sup>٢</sup> - س عند س = ١ عند

النقطة (١، ٣) ثم أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها هذا المماس مع الإحداثيات الموجبة لمحور السينات لأقرب درجة.

١٥- أوجد مشتقة الدالة المشتقة لكل من الدوال الآتية:

- |                              |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|
| ① د (س) = س <sup>٢</sup> + س | ② د (س) = س <sup>٢</sup> - س + ٢ |
| ③ د (س) = س <sup>٢</sup> + ١ | ④ د (س) = س <sup>٢</sup> - ١     |
| ⑤ د (س) = س <sup>٢</sup> - ٢ | ⑥ د (س) = س <sup>٢</sup> + ١     |
| ⑦ د (س) = س <sup>٢</sup> + ٣ | ⑧ د (س) = س <sup>٢</sup> - ٢     |

١٦- أوجد المشتقة الأولى للدالة و هي كل مما يأتي وعين قيم س التي تكون عندها الدالة

غير قابلة للاشتقاق:

- |                              |                                  |
|------------------------------|----------------------------------|
| ① د (س) = س <sup>٢</sup> + س | ② د (س) = س <sup>٢</sup> - س + ١ |
| ③ د (س) = س <sup>٢</sup> - ١ | ④ د (س) = س <sup>٢</sup> + ٣     |



11 أبحث قابلية الاشتقاق لكل من السؤال الآتية عند النقط المعطاة:

1 د (س) = س<sup>2</sup> - س + 1 عند س = 1

2 د (س) = س<sup>2</sup> - 4 عند س = صفر

3 د (س) =  $\frac{1-س}{1+س}$  عند س = 2

4 د (س) =  $\sqrt{1-س}$  عند س = 1 عند س = 0

12 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د

د (س) =  $\begin{cases} 5 - س^2 & \text{عندما } س \geq 2 \\ 3 - س^2 & \text{عندما } س < 2 \end{cases}$  عند س = 2

13 إذا كان د (س) =  $\begin{cases} |س - 2| & \text{عندما } س \leq 2 \\ 4 - س^2 & \text{عندما } س > 2 \end{cases}$

فأبحث قابلية الاشتقاق للدالة د عند س = 2

14 أبحث الاتصال وقابلية الاشتقاق للدالة د عند س = 1 حيث د

د (س) =  $\begin{cases} س^2 + 2 & \text{عندما } س \geq 1 \\ س + 2 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$

15 أبحث قابلية الدالة د للاشتقاق عند س = 1 حيث د

د (س) =  $\begin{cases} س^3 + 4س - 3 & \text{عندما } س > 1 \\ 3س^2 - 12س + 11 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$

16 أبحث قابلية الاشتقاق الدالة د عند س = 1 حيث د

د (س) =  $\begin{cases} 4 - س^2 & \text{عندما } س \geq 1 \\ 2س + 1 & \text{عندما } س < 1 \end{cases}$

17 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د (س) = |س - 2| عند س = 2

18 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د (س) = |س| عند س = 1

19 أبحث قابلية الاشتقاق للدالة د حيث د (س) = (س - 4)|س| عند س = 1



13) أوجد قيمة الثابت  $m$  إذا كانت الدالة  $d$  حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 1 + s^2 & \text{عندما } s \leq 2 \\ 2 - s & \text{عندما } s > 2 \end{cases}$$

متصلة عند  $s = 2$  ثم أبحث قابلية الاشتقاق للدالة عند  $s = 2$

[1]

14) إذا كانت الدالة  $d$  حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 1 + s & \text{عندما } s \geq 1 \\ 1 - s^2 & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$$

متصلة عند  $s = 1$  فأوجد قيمة الثابت  $m$  ثم أبحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق عند  $s = 1$

[2]

15) إذا كانت الدالة  $d$  حيث:

$$d(s) = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{عندما } s > 0 \\ 1 + s & \text{عندما } s < 0 \end{cases}$$

متصلة عند  $s = 0$  فأوجد قيمة الثابت  $m$  ثم أبحث قابلية هذه الدالة للاشتقاق عند  $s = 0$

[3]

16) إذا كانت الدالة  $d$  حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 3 + s & \text{عندما } s > 2 \\ 1 + s^2 & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases}$$

متصلة عند  $s = 2$  فأوجد قيمة الثابت  $m$  ثم أبحث قابلية الدالة للاشتقاق عند  $s = 2$

[4]

17) أوجد قيمة الثابت  $m$  إذا كانت الدالة  $d$  قابلة للاشتقاق عند  $s = 2$  حيث:

$$d(s) = \begin{cases} 2 + s & \text{عندما } s > 2 \\ 1 + s^2 + 8s - 9 & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases}$$

[5]

18) إذا كان  $d(s) = 1 + s^2 + b$  حيث  $m, b$  ثابتان أوجد:

① المشتقة الأولى للدالة  $d$  عند أي نقطة  $(s, d(s))$

② قيمتي  $m, b$  إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة  $(2, 3)$  الواقعة عليه

بساوي 12

[18-17]

19) إذا كان  $d(s) = \frac{1}{s} + b$  حيث  $m, b$  ثابتان أوجد:

① المشتقة الأولى للدالة  $d$  عند أي نقطة  $(s, d(s))$

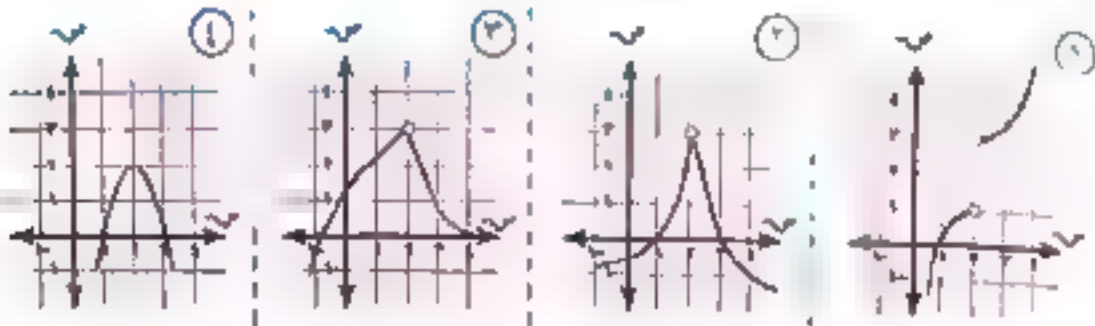
② قيمتي  $m, b$  إذا كان ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة  $(1, 4)$  الواقعة عليه

بساوي 3

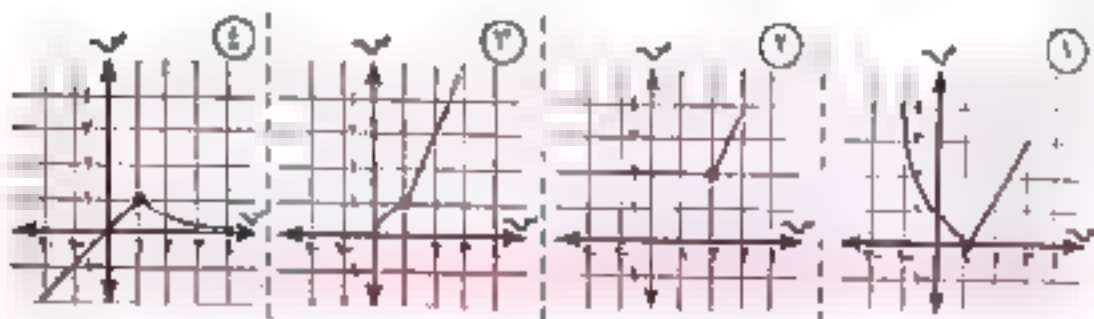
[19]



أي الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند  $x = 2$  ؟



أي الدوال الآتية قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$  ؟



أختار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

① إذا كانت دالة  $f$  ومكان  $x = 2$  ،  $f'(2) = 1$  فإن  $f$  د (س) = .....  
[ ٢ - ١ ٤ ٣ - ٤ غير موجودة ]

② إذا كانت الدالة  $f$  د (س) = .....  
[ ٢ - ١ ٤ ٣ - ٤ غير موجودة ]

قابلة للاشتقاق عند  $x = 1$  ، فإن  $f$  د (س) = .....

[ ٢ - ١ ٤ ٣ - ٤ غير موجودة ]

③ إذا كانت الدالة  $f$  د (س) = .....  
[ ٢ - ١ ٤ ٣ - ٤ غير موجودة ]

قابلة للاشتقاق عند  $x = \frac{\pi}{4}$  ، فإن  $f$  د (س) = .....

[ ٢ - ١ ٤ ٣ - ٤ غير موجودة ]



$$\textcircled{1} \text{ إذا كانت الدالة } d: (s) = \begin{cases} s^2 & \text{عندما } s \geq 2 \\ s & \text{عندما } s < 2 \end{cases}$$

قابلية الاشتقاق عند  $s = 2$  فإن  $d'(2) = \dots$

$$[6 \text{ ك } 12 \text{ ك } 7 \text{ ك } 8]$$

$$\textcircled{2} \text{ إذا كانت } d: (s) = s \text{ فإن } d'(0) = \dots$$

$$[صفر \text{ ك } 2 \text{ ك } -2 \text{ ك غير موجودة}]$$

### مسائل تقيس مستويات عمق التفكير

$$\textcircled{1} \text{ أبحث قابلية الاشتقاق للدالة } d: (s) = \begin{cases} (3-s)^2 & \text{عند } s = 2 \end{cases}$$

أبحث قابلية الاشتقاق للدالة  $d$  عند  $s = 2$  حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} s^2 + 1 & \text{عندما } s \leq 1 \\ |s| & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$$

إذا كانت الدالة  $d$  حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} -s^2 + 2s + 1 & \text{عندما } s \geq 1 \\ \frac{2}{|s|} & \text{عندما } s < 1 \end{cases}$$

أبحث قابلية الاشتقاق للدالة  $d$  عند  $s = 1$

إذا كانت الدالة  $d$  حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} 1 + s & \text{عندما } |s| \geq 1 \\ 1 + s^2 & \text{عندما } |s| < 1 \end{cases}$$

أبحث قابلية الاشتقاق للدالة  $d$  عند  $s = 1$

إذا كانت الدالة  $d$  حيث،

$$d: (s) = \begin{cases} 2 + s & \text{عندما } s > 1 \\ 4 + s^2 & \text{عندما } s \leq 1 \end{cases}$$

متصلة عند  $s = 1$  و  $d(1) = 11$  أوجد قيم الثابتين  $a$  و  $b$

ثم أبحث قابلية الاشتقاق عند  $s = 1$

[2.1]



## قواعد الاشتقاق

الدروس

٣

علماً أن المشتقة الأولى للدالة  $y = f(x)$  هي  $y' = f'(x)$  ، فإن

والاحتمال أن إيجاد المشتقة الأولى لبعض الدوال مثل  $y = x^2 + 2x + 1$  ،  
تحتاج إلى كثير من الجهد والوقت للوصول إليها لذلك سوف نتعرف على بعض قواعد  
الاشتقاق التي تسهل علينا إيجاد المشتقة الأولى دون عناء أو جهد فيما يلي .

### مشتقة الدالة الثابتة

إذا كانت  $y = c$  حيث  $c$  (ثابت)  $\in \mathbb{R}$  فإن  $y' = \frac{dy}{dx} = 0$  صفر

وذلك لأن :

$$y = c \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y' = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}(c + 0) = \frac{d}{dx}c + \frac{d}{dx}0 = 0 + 0 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{d}{dx}(c) = \frac{d}{dx}(c + 0) = \frac{d}{dx}c + \frac{d}{dx}0 = 0 + 0 = 0$$



فمثلاً

إذا كانت  $x = 3$

إذا كانت  $x = -4$

فإن  $x' = \text{صفر}$

فإن  $x' = (\text{س}) \text{ صفر}$

### المشتقة الأولى للدوال

إذا كانت  $x = \text{س}$  حيث  $x \geq 0$

إذا كانت  $x = \text{س}$  حيث  $x < 0$

إذا كانت  $x = \text{س}$

فإن  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1 - 0$

فإن  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1 - 0$

فإن  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1$

فمثلاً

إذا كانت  $x = 2$

إذا كانت  $x = 4$

إذا كانت  $x = 2$

فإن  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 2 - 2$

فإن  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 8 - 3$

فإن  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 2$

### مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١.  $x' = (\text{س}) = 3 - 2$

٢.  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 4 - 2$

٣.  $x' = (\text{س}) = 5$

٤.  $x' = \frac{1}{\text{س}} = 3$

### الحل

١.  $x' = (\text{س}) = \text{صفر}$

٢.  $x' = (\text{س}) = 2 \times 2 = 4 - 6 = \text{س}$

٣.  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = 1 - 2 = \frac{2}{\text{س}}$

٤.  $x' = \frac{\text{س}}{\text{س}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\text{س}} = \frac{1}{2\text{س}}$

١.  $x' = (\text{س}) = 5$

٢.  $x' = (\text{س}) = 3 - 2$

٣.  $x' = \frac{1}{\text{س}} = 3 - 2$

٤.  $x' = \frac{1}{\text{س}} = 4 - 3 = \frac{1}{\text{س}}$



إذا كانت  $x, y, z$  دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير  $s$  فإن  $x \pm y$  تكون أيضاً قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى  $s$  ويكون  $\frac{d}{ds}(x \pm y) = \frac{dx}{ds} \pm \frac{dy}{ds}$  وبصفة عامة فإن،

إذا كانت  $d_1, d_2, \dots, d_n$  دوال قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير  $s$  فإن:

$$\frac{d}{ds}(d_1 \pm d_2 \pm \dots \pm d_n) = \left(\frac{d}{ds}d_1\right) \pm \left(\frac{d}{ds}d_2\right) \pm \dots \pm \left(\frac{d}{ds}d_n\right)$$

فمثلاً

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(s^3 + 2s^2 + 5s) &= \frac{d}{ds}(s^3) + \frac{d}{ds}(2s^2) + \frac{d}{ds}(5s) \\ &= 3s^2 + 4s + 5 \end{aligned}$$

مثال

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١)  $d(s) = 2s^3 + 3s^2 - 4s + 5$

٢)  $s = (2s^2 - 4s + 7)$

٣)  $s = \frac{2s^3 + 6s^2 + s + 1}{3}$  حيث  $s \neq 0$

الحل

١)  $d(s) = 2s^3 + 3s^2 - 4s + 5$

$\therefore d'(s) = 6s^2 + 6s - 4$

٢)  $s = (2s^2 - 4s + 7)$  **بذلك الأقواس**

$= 2s^2 - 4s + 7$

$\therefore s' = 4s - 4$



$$\textcircled{3} \therefore \text{من} = \frac{\text{من}^3 + \text{من}^2 + \text{من} + 1}{3} = \frac{1 + 1 + 1 + 1}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

مثال ٣

إذا كانت  $\text{من} = 2$  من  $2 + 3 = 5$  من  $5 - 1 = 4$  من  $4 \times \frac{1}{4} = 1$  فاوجد  $\frac{1}{\text{من}}$

الحل

$$\text{من} = 2 \text{ من}^2 + 3 = 5 \text{ من}^5 - 1 = 4 \text{ من}^4 \times \frac{1}{4} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{\text{من}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال ٤

إذا كانت  $\text{من} = 2$  من  $2 + 3 = 5$  من  $5 - 1 = 4$  من  $4 \times \frac{1}{4} = 1$  فاوجد ميل المماس لمنحنى الدالة عند النقطة (١، ١)

الحل

$$\frac{1}{\text{من}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{الميل عند النقطة (١، ١)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

مثال ٥

أوجد قياس الزاوية التي يصنعها المماس مع الإتجاه الموجب لمحور السينات للمحنى  $\frac{1}{\text{من}} = 2$  من  $2 + 3 = 5$  من  $5 - 1 = 4$  من  $4 \times \frac{1}{4} = 1$  عند النقطة (١، ١)

الحل

$$\frac{1}{\text{من}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{الميل عند النقطة (١، ١)} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{الميل} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$



إذا كانت  $u, v$  دالتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة للمتغير  $s$  فإن الدالة  $(u \cdot v)$  تكون أيضًا قابلة للاشتقاق بالنسبة للمتغير  $s$  ويكون  $\frac{d}{ds}(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{ds} + v \cdot \frac{du}{ds}$  أي أن مشتقه حاصل ضرب - الدالة الأولى  $\times$  مشتقة الثانية + الدالة الثانية  $\times$  مشتقة الأولى

### مثال ٤

إذا كان  $D(3 + 2s) = (3 - s^2 - 2s + 1)$  فأوجد  $D'(s)$   
ثم أوجد  $D'(1)$

### الحل

$D'(s) =$  الدالة الأولى  $\times$  مشتقة الثانية + الدالة الثانية  $\times$  مشتقة الأولى

$$= (3 + 2s) \times (2 - 2s) + (3 - s^2 - 2s + 1) \times (2)$$

$$= 6 - 4s + 6 - 2s^2 - 2s + 2 = 14 - 4s - 2s^2$$

$$\therefore D'(1) = 14 - 4(1) - 2(1)^2 = 10$$

**ملاحظة:** نلاحظ أن البدء بحساب ضرب الدالتين أولاً ثم إيجاد  $D'(s)$  كما يلي:

$$D(s) = (3 + 2s)(3 - s^2 - 2s + 1)$$

$$= 6 - 4s + 6 - 2s^2 - 2s + 2 = 14 - 4s - 2s^2$$

$\therefore D'(s) = 14 - 4s - 2s^2$  وهي نفس النتيجة السابقة

### مثال ٥

إذا كان  $D(s) = (s^2 - 1)(s^2 + 2s - \frac{3}{s})$  أوجد  $\frac{d}{ds}$  عندما  $s = 1$

### الحل

$$\therefore D'(s) = (s^2 - 1) \cdot \frac{d}{ds}(s^2 + 2s - \frac{3}{s}) + (s^2 + 2s - \frac{3}{s}) \cdot \frac{d}{ds}(s^2 - 1)$$

$$= (s^2 - 1)(2s + 2 + \frac{3}{s^2}) + (s^2 + 2s - \frac{3}{s})(2s)$$



$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{(2s-1) \times (\frac{1}{4}s + 2s + 8) + (\frac{1}{4}s - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3s - \frac{1}{4}s + 2s + 4)}{(2s-1) \times (\frac{1}{4}s + 2s + 8) + (\frac{1}{4}s - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3s - \frac{1}{4}s + 2s + 4)}$$

عندما  $s=1$

$$\therefore \frac{u}{v} = \frac{(2(1)-1) \times (\frac{1}{4}(1) + 2 \times 1 + 8) + (\frac{1}{4}(1) - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3(1) - \frac{1}{4}(1) + 2(1) + 4)}{(2(1)-1) \times (\frac{1}{4}(1) + 2 \times 1 + 8) + (\frac{1}{4}(1) - \frac{1}{4} - 2) \times (1-3(1) - \frac{1}{4}(1) + 2(1) + 4)}$$

إذا كانت  $u$ ،  $v$  دالتين قابلتين للإشتقاق بالنسبة للمتغير  $s$  وكانت  $v$  (س)  $\neq 0$ ،  
فإن الدالة  $(\frac{u}{v})$  تكون أيضًا قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير  $s$  ويكون:

$$\frac{u}{v} \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u}{v^2} \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$$

أي أن: مشتقة خارج القسمة =  $\frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال ٥

أوجد المشتقة الأولى للدالة  $\frac{2s}{3+s^2}$  ثم أوجد  $D_{s=2}$

الحل

$$\frac{u}{v} = \frac{2s}{3+s^2} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{2s}{3+s^2} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{2s}{3+s^2}$$

$$D_{s=2} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$



### مثال

$$\text{أوجد } \frac{u}{u+v} \text{ إذا كان } \frac{(u+v)(v+3)}{u+4} =$$

### الحل

$$\frac{(u+v)(v+3)}{u+4} = \frac{u}{u+v} \quad \therefore \frac{u^2 + uv + 3u + 3v}{u+4} = \frac{u}{u+v}$$

$$\frac{u^2 + uv + 3u + 3v}{u+4} = \frac{u}{u+v} \quad \therefore \frac{u^2 + uv + 3u + 3v}{u+4} = \frac{u}{u+v}$$

$$\frac{u^2 + uv + 3u + 3v}{u+4} = \frac{u}{u+v} \quad \therefore \frac{u^2 + uv + 3u + 3v}{u+4} = \frac{u}{u+v}$$

### مثال

$$\text{أوجد ميل المماس للمعنى } \frac{u^2 + 2u - 1}{u+1} \text{ عند } u=1$$

### الحل

$$\text{ميل المماس} = \frac{u}{u+v} = \frac{u^2 + 2u - 1}{u+1} \quad \therefore \frac{u^2 + 2u - 1}{u+1} = \frac{u}{u+v}$$

$$\frac{u^2 + 2u - 1}{u+1} = \frac{u}{u+v} \quad \therefore \frac{u^2 + 2u - 1}{u+1} = \frac{u}{u+v}$$

$$u'(1) = \frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{2+2+1}{1} = \frac{5}{1} = 5$$





هذه الدالة  
تأخذ قيمها  
أعلى من  
الحد الأدنى

اجمع معنا واحتم نفسك

الوقت ٥:٠٠



اختبار تراكمي

### أجب عن الأسئلة الآتية:

- ١) إذا كانت الدالة قابلة للإشتقاق عند  $s = 1$  فإنها تكون ..... عند  $s = 1$   
[غير متصلة  $s$   $s'$  غير معرفة  $s$   $s$  غير معرفة  $s$  متصلة]
- ٢) إذا كانت الدالة  $f$  حيث:  $f(s) = \begin{cases} s^2 + 5 & \text{عندما } s > 2 \\ s + 1 & \text{عندما } s \leq 2 \end{cases}$   
فإن  $f$  قابلة للإشتقاق عند  $s = 2$  فإن  $f =$  .....

- ٣) متوسط تغير الدالة  $f$  حيث  $f(s) = \sqrt{s}$  عندما تتغير  $s$  من ١ إلى ٤،  $f(1)$  إلى  $f(4)$  يساوي .....
- ٤) معدل تغير الدالة  $f$  حيث  $f(s) = s^2 - 1$  عند  $s = 2$  يساوي .....

- ٥) أبحث قابلية إشتقاق الدالة  $f$  حيث  $f(s) = \begin{cases} s^2 + 2 & \text{عندما } s \leq 1 \\ s - 1 & \text{عندما } s > 1 \end{cases}$  عند  $s = 1$

- ٦) أبحث قابلية إشتقاق الدالة  $f$  حيث  $f(s) = |s - 2|$  عند  $s = 2$



مسائل المستوى الأول

أكثر الإجابة صحيحة من بين الإجابات المعطاة.

①  $\frac{x}{x-7} = \dots\dots\dots$  [ ٧ في صفر في ١ في غير موجودة ]

②  $\frac{x}{x-\pi} = \dots\dots\dots$  [ صفر في ٠ في  $\pi$  في غير معرف ]

③  $\frac{x}{x-7} = \dots\dots\dots$  [ ٦ في ٧ في ٧ في ٧ ]

④  $\frac{x}{x-2} = \dots\dots\dots$  [ ٥ في ٢ في ٢ في ٦ ]

⑤  $\frac{x}{x-3} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{3}{x}$  في  $\frac{3}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑥  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [ ٢ في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{2}{x}$  ]

⑦  $\frac{x}{x-5} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{5}{x}$  في  $\frac{3}{x}$  في  $\frac{3}{x-5}$  في  $\frac{5}{x-5}$  ]

⑧  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑨  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑩  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑪  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑫  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑬  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑭  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑮  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑯  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]

⑰  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$  [  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  في  $\frac{1}{x}$  في  $\frac{1}{x-1}$  ]



## مسائل المستوى الثاني

مسائل على مجموع دالتين أو عدة دوال

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية حيث  $x \neq 0$ :

$$(1) \text{ من } 4 - x + x^2 \quad (2) \text{ د (من) } = 2 - x^3 + 2 + x + 1$$

$$(3) \text{ من } 2 - x^3 - 4 + x^2 + 9 + x + 8 \quad (4) \text{ من } = \frac{1}{x^3} - 2 - x^2 - 1$$

$$(5) \text{ من } = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} + x - 7 \quad (6) \text{ من } = (2 - x^3 + 2 + x^2 + 3)$$

$$(7) \text{ د (من) } = (x^2 - x - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}) \quad (8) \text{ من } = 2 - x^{10} - 3 - x^2 - \frac{5}{x^3}$$

$$(9) \text{ من } = 2 - x^2 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + 4 \quad (10) \text{ من } = (3 - x^2 - \sqrt{x})$$

$$(11) \text{ من } = \sqrt{x} (2 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}) \quad (12) \text{ د (من) } = \frac{x + 2 + x^2 - 3}{x}$$

$$(13) \text{ من } = \frac{2 - x^3 + 2 + x^2 - 7}{x^2} \quad (14) \text{ من } = \frac{4 - x^2 - 3 - x + 2}{x}$$

$$(15) \text{ من } = \frac{2 - x^2 - x + 3}{x} \quad (16) \text{ من } = 2 - x^3 + 2 + \sqrt{x}$$

$$(17) \text{ من } = \sqrt{x} - \frac{2}{x^2} - 9 + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4}$$

$$(18) \text{ من } = \frac{(3 - x)(3 + x)}{x^2} \quad (19) \text{ من } = \frac{(2 + \sqrt{x})(2 - \sqrt{x})(2 + x)}{\sqrt{x}}$$

$$(20) \text{ من } = x^2 + (1 + x)^2 - x + 5$$

أخيرًا: أوجد مصدبة من بين الإجابات المعطاة

(1) ميل المماس للمنحنى من  $x^3 - 3 - x^2 + 2 + x + 2$  عند  $x = 1$  يساوي

[صفر 4 - 1 4 1 2]

(2) ميل المماس للمنحنى من  $x^2 + x^3 + 2 - x^2$  عند النقطة  $(-1, -1)$  يساوي

[صفر 4 - 4 4 1]

(3) ميل المماس للمنحنى من  $\frac{1}{x} + \sqrt{x}$  عند النقطة  $(1, 2)$  يساوي

[صفر 4 1 4 - 2]



قياس الزاوية التي يصنعها المماس لكل من المنحنيات الآتية مع الاتجاه الموجب لمحور السينات:

①  $y = x^2 - 9$  من عند  $x = 9$  تساوى .....

[ $90^\circ$   $^\circ 45$   $^\circ 30$   $^\circ 60$ ]

② د (س) =  $x^3 + x^2 + x + 4$  من عند  $x = -9$  تساوى .....

[ $90^\circ$   $^\circ 45$   $^\circ 60$   $^\circ 30$ ]

③  $y = x^2 - 3x + 5$  عند النقطة (1, 3) تساوى .....

[صفر  $^\circ 30$   $^\circ 45$   $^\circ 60$ ]

④ د (س) =  $\frac{1}{x} - x^2$  عند النقطة  $(\frac{1}{3}, -\frac{10}{27})$  تساوى .....

[صفر  $^\circ 30$   $^\circ 45$   $^\circ 60$ ]

أثبت ان المماس للمنحنى  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  عند النقطة (1, 2) يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $\frac{\pi}{4}$

مسائل على مشتقة حاصل ضرب دالتين

أوجد المشتقة الأولى لكل من لدوال الآتية:

①  $y = (x^2 - 3)(x + 1)$

②  $y = (x^2 + 1)(x - 4)$

③  $y = (x^2 + 2)(x - 1)$

④  $y = (x^2 - 3)(x^2 + 2 - x - 4)$

⑤  $y = (x^2 + 1)(x^2 - 2 + x + 1)$

⑥  $y = (x^2 + 3)(x^2 - 3 + x + 1)$

⑦  $y = (x^2 - \sqrt{x})(x^2 + \sqrt{x})$

⑧  $y = (x^2 - 3 + x - \frac{1}{x})(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x})$

⑨  $y = (\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x})$

⑩  $y = x^2(2 - x)(1 - x + x^2 - 2)$



مسائل على مشتقة خارج قسمة دالتين

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$\textcircled{2} \text{ ص } \frac{1-s}{3+s^2}$$

$$\textcircled{1} \text{ ص } \frac{s}{2+s}$$

$$\textcircled{4} \text{ ص } \frac{2-s^5}{1+s^5}$$

$$\textcircled{3} \text{ ص } \frac{9-s^2}{3-s}$$

$$\textcircled{6} \text{ ص } \frac{3-s^2}{1+s^2}$$

$$\textcircled{5} \text{ ص } \frac{s}{3-s^2}$$

$$\textcircled{8} \text{ ص } \frac{s^2+2s+5}{1+s^5-s^2}$$

$$\textcircled{7} \text{ ص } \frac{s^2+1+s}{2+s}$$

$$\textcircled{10} \text{ ص } \frac{s^2}{2-s} + \frac{s}{2+s}$$

$$\textcircled{9} \text{ ص } \frac{(1+s)(1-s)}{1+s^2}$$

أوجد ميل المماس للمحنى ص =  $\frac{s}{1+s^2}$  عند  $s=2$  [ $\frac{2}{15}$ ]

مسائل متنوعة على قواعد الاشتقاق

١٩ إذا كان  $s = 3 - s^2$  من فأوجد قيم  $s$  التي تجعل  $\frac{ds}{dt} = 0$  صفر [٣، ١]

٢٠ إذا كان  $d(s) = 3 - s^2 + 5s$  فأوجد قيم  $s$  التي تجعل  $d'(s) = 7$  [١٢]

٢١ إذا كان  $d(s) = (2-s)(3+s+1)$  فأوجد قيم  $s$  التي تجعل  $d'(s) = 5$  [١]

٢٢ إذا كان  $d(s) = \frac{s}{1+s^2}$  فأوجد قيم  $s$  التي يكون عندها  $d'(s) = 0$  صفر [١١، ١]

٢٣ إذا كانت  $s = 3 - s^2 + 1 + s$   $d'(1) = 1$  فأوجد قيمة  $d$  [١]

٢٤ إذا كانت  $d(s) = 1 + s^2 + b$   $s$  وكانت  $d(1) = 2$  و  $d'(1) = 0$

فأوجد قيمة كل من  $b$  و  $a$

[١٠، ٢]

٢٥ إذا كان ميل المماس للمحنى ص =  $s^2 + 1 + s$   $b$  يساوي ١ عند النقطة  $(2, 4)$

فأوجد قيمة كل من  $a$  و  $b$

[٥، ١١]



أوجد  $\frac{y}{x}$  إذا كانت :

$$x = (x-1)(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7)(x+8)(x+9)(x+10)$$

أوجد ميل المماس للمنحنى  $x = 1 - t$  عند نقطة تقاطعه مع محور السينات [10-11]

أوجد ميل المماس للمنحنى  $x = 1 - t$  عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات [12]

أوجد ميل المماس للمنحنى  $x = 1 - t$  عند كل نقطة من نقطة تقاطعه مع المستقيم  $x + 2y = 4$  [13-14]

حدد نوع الزاوية التي يصنعها المماس للمنحنى  $x = 1 - t$  عند النقطة (1, 2) ، (1, 1) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات [حالة، متفرقة]

إذا كان  $x = 1 - t$  ،  $y = 2 + t$  ،  $z = 3 + t$  ،  $w = 4 + t$  ،  $v = 5 + t$  ،  $u = 6 + t$  ،  $t = 7$  ،  $s = 8$  ،  $r = 9$  ،  $q = 10$  ،  $p = 11$  ،  $o = 12$  ،  $n = 13$  ،  $m = 14$  ،  $l = 15$  ،  $k = 16$  ،  $j = 17$  ،  $i = 18$  ،  $h = 19$  ،  $g = 20$  ،  $f = 21$  ،  $e = 22$  ،  $d = 23$  ،  $c = 24$  ،  $b = 25$  ،  $a = 26$  ،  $z = 27$  ،  $y = 28$  ،  $x = 29$  ،  $w = 30$  ،  $v = 31$  ،  $u = 32$  ،  $t = 33$  ،  $s = 34$  ،  $r = 35$  ،  $q = 36$  ،  $p = 37$  ،  $o = 38$  ،  $n = 39$  ،  $m = 40$  ،  $l = 41$  ،  $k = 42$  ،  $j = 43$  ،  $i = 44$  ،  $h = 45$  ،  $g = 46$  ،  $f = 47$  ،  $e = 48$  ،  $d = 49$  ،  $c = 50$  ،  $b = 51$  ،  $a = 52$  ،  $z = 53$  ،  $y = 54$  ،  $x = 55$  ،  $w = 56$  ،  $v = 57$  ،  $u = 58$  ،  $t = 59$  ،  $s = 60$  ،  $r = 61$  ،  $q = 62$  ،  $p = 63$  ،  $o = 64$  ،  $n = 65$  ،  $m = 66$  ،  $l = 67$  ،  $k = 68$  ،  $j = 69$  ،  $i = 70$  ،  $h = 71$  ،  $g = 72$  ،  $f = 73$  ،  $e = 74$  ،  $d = 75$  ،  $c = 76$  ،  $b = 77$  ،  $a = 78$  ،  $z = 79$  ،  $y = 80$  ،  $x = 81$  ،  $w = 82$  ،  $v = 83$  ،  $u = 84$  ،  $t = 85$  ،  $s = 86$  ،  $r = 87$  ،  $q = 88$  ،  $p = 89$  ،  $o = 90$  ،  $n = 91$  ،  $m = 92$  ،  $l = 93$  ،  $k = 94$  ،  $j = 95$  ،  $i = 96$  ،  $h = 97$  ،  $g = 98$  ،  $f = 99$  ،  $e = 100$  ،  $d = 101$  ،  $c = 102$  ،  $b = 103$  ،  $a = 104$  ،  $z = 105$  ،  $y = 106$  ،  $x = 107$  ،  $w = 108$  ،  $v = 109$  ،  $u = 110$  ،  $t = 111$  ،  $s = 112$  ،  $r = 113$  ،  $q = 114$  ،  $p = 115$  ،  $o = 116$  ،  $n = 117$  ،  $m = 118$  ،  $l = 119$  ،  $k = 120$  ،  $j = 121$  ،  $i = 122$  ،  $h = 123$  ،  $g = 124$  ،  $f = 125$  ،  $e = 126$  ،  $d = 127$  ،  $c = 128$  ،  $b = 129$  ،  $a = 130$  ،  $z = 131$  ،  $y = 132$  ،  $x = 133$  ،  $w = 134$  ،  $v = 135$  ،  $u = 136$  ،  $t = 137$  ،  $s = 138$  ،  $r = 139$  ،  $q = 140$  ،  $p = 141$  ،  $o = 142$  ،  $n = 143$  ،  $m = 144$  ،  $l = 145$  ،  $k = 146$  ،  $j = 147$  ،  $i = 148$  ،  $h = 149$  ،  $g = 150$  ،  $f = 151$  ،  $e = 152$  ،  $d = 153$  ،  $c = 154$  ،  $b = 155$  ،  $a = 156$  ،  $z = 157$  ،  $y = 158$  ،  $x = 159$  ،  $w = 160$  ،  $v = 161$  ،  $u = 162$  ،  $t = 163$  ،  $s = 164$  ،  $r = 165$  ،  $q = 166$  ،  $p = 167$  ،  $o = 168$  ،  $n = 169$  ،  $m = 170$  ،  $l = 171$  ،  $k = 172$  ،  $j = 173$  ،  $i = 174$  ،  $h = 175$  ،  $g = 176$  ،  $f = 177$  ،  $e = 178$  ،  $d = 179$  ،  $c = 180$  ،  $b = 181$  ،  $a = 182$  ،  $z = 183$  ،  $y = 184$  ،  $x = 185$  ،  $w = 186$  ،  $v = 187$  ،  $u = 188$  ،  $t = 189$  ،  $s = 190$  ،  $r = 191$  ،  $q = 192$  ،  $p = 193$  ،  $o = 194$  ،  $n = 195$  ،  $m = 196$  ،  $l = 197$  ،  $k = 198$  ،  $j = 199$  ،  $i = 200$  ،  $h = 201$  ،  $g = 202$  ،  $f = 203$  ،  $e = 204$  ،  $d = 205$  ،  $c = 206$  ،  $b = 207$  ،  $a = 208$  ،  $z = 209$  ،  $y = 210$  ،  $x = 211$  ،  $w = 212$  ،  $v = 213$  ،  $u = 214$  ،  $t = 215$  ،  $s = 216$  ،  $r = 217$  ،  $q = 218$  ،  $p = 219$  ،  $o = 220$  ،  $n = 221$  ،  $m = 222$  ،  $l = 223$  ،  $k = 224$  ،  $j = 225$  ،  $i = 226$  ،  $h = 227$  ،  $g = 228$  ،  $f = 229$  ،  $e = 230$  ،  $d = 231$  ،  $c = 232$  ،  $b = 233$  ،  $a = 234$  ،  $z = 235$  ،  $y = 236$  ،  $x = 237$  ،  $w = 238$  ،  $v = 239$  ،  $u = 240$  ،  $t = 241$  ،  $s = 242$  ،  $r = 243$  ،  $q = 244$  ،  $p = 245$  ،  $o = 246$  ،  $n = 247$  ،  $m = 248$  ،  $l = 249$  ،  $k = 250$  ،  $j = 251$  ،  $i = 252$  ،  $h = 253$  ،  $g = 254$  ،  $f = 255$  ،  $e = 256$  ،  $d = 257$  ،  $c = 258$  ،  $b = 259$  ،  $a = 260$  ،  $z = 261$  ،  $y = 262$  ،  $x = 263$  ،  $w = 264$  ،  $v = 265$  ،  $u = 266$  ،  $t = 267$  ،  $s = 268$  ،  $r = 269$  ،  $q = 270$  ،  $p = 271$  ،  $o = 272$  ،  $n = 273$  ،  $m = 274$  ،  $l = 275$  ،  $k = 276$  ،  $j = 277$  ،  $i = 278$  ،  $h = 279$  ،  $g = 280$  ،  $f = 281$  ،  $e = 282$  ،  $d = 283$  ،  $c = 284$  ،  $b = 285$  ،  $a = 286$  ،  $z = 287$  ،  $y = 288$  ،  $x = 289$  ،  $w = 290$  ،  $v = 291$  ،  $u = 292$  ،  $t = 293$  ،  $s = 294$  ،  $r = 295$  ،  $q = 296$  ،  $p = 297$  ،  $o = 298$  ،  $n = 299$  ،  $m = 300$  ،  $l = 301$  ،  $k = 302$  ،  $j = 303$  ،  $i = 304$  ،  $h = 305$  ،  $g = 306$  ،  $f = 307$  ،  $e = 308$  ،  $d = 309$  ،  $c = 310$  ،  $b = 311$  ،  $a = 312$  ،  $z = 313$  ،  $y = 314$  ،  $x = 315$  ،  $w = 316$  ،  $v = 317$  ،  $u = 318$  ،  $t = 319$  ،  $s = 320$  ،  $r = 321$  ،  $q = 322$  ،  $p = 323$  ،  $o = 324$  ،  $n = 325$  ،  $m = 326$  ،  $l = 327$  ،  $k = 328$  ،  $j = 329$  ،  $i = 330$  ،  $h = 331$  ،  $g = 332$  ،  $f = 333$  ،  $e = 334$  ،  $d = 335$  ،  $c = 336$  ،  $b = 337$  ،  $a = 338$  ،  $z = 339$  ،  $y = 340$  ،  $x = 341$  ،  $w = 342$  ،  $v = 343$  ،  $u = 344$  ،  $t = 345$  ،  $s = 346$  ،  $r = 347$  ،  $q = 348$  ،  $p = 349$  ،  $o = 350$  ،  $n = 351$  ،  $m = 352$  ،  $l = 353$  ،  $k = 354$  ،  $j = 355$  ،  $i = 356$  ،  $h = 357$  ،  $g = 358$  ،  $f = 359$  ،  $e = 360$  ،  $d = 361$  ،  $c = 362$  ،  $b = 363$  ،  $a = 364$  ،  $z = 365$  ،  $y = 366$  ،  $x = 367$  ،  $w = 368$  ،  $v = 369$  ،  $u = 370$  ،  $t = 371$  ،  $s = 372$  ،  $r = 373$  ،  $q = 374$  ،  $p = 375$  ،  $o = 376$  ،  $n = 377$  ،  $m = 378$  ،  $l = 379$  ،  $k = 380$  ،  $j = 381$  ،  $i = 382$  ،  $h = 383$  ،  $g = 384$  ،  $f = 385$  ،  $e = 386$  ،  $d = 387$  ،  $c = 388$  ،  $b = 389$  ،  $a = 390$  ،  $z = 391$  ،  $y = 392$  ،  $x = 393$  ،  $w = 394$  ،  $v = 395$  ،  $u = 396$  ،  $t = 397$  ،  $s = 398$  ،  $r = 399$  ،  $q = 400$  ،  $p = 401$  ،  $o = 402$  ،  $n = 403$  ،  $m = 404$  ،  $l = 405$  ،  $k = 406$  ،  $j = 407$  ،  $i = 408$  ،  $h = 409$  ،  $g = 410$  ،  $f = 411$  ،  $e = 412$  ،  $d = 413$  ،  $c = 414$  ،  $b = 415$  ،  $a = 416$  ،  $z = 417$  ،  $y = 418$  ،  $x = 419$  ،  $w = 420$  ،  $v = 421$  ،  $u = 422$  ،  $t = 423$  ،  $s = 424$  ،  $r = 425$  ،  $q = 426$  ،  $p = 427$  ،  $o = 428$  ،  $n = 429$  ،  $m = 430$  ،  $l = 431$  ،  $k = 432$  ،  $j = 433$  ،  $i = 434$  ،  $h = 435$  ،  $g = 436$  ،  $f = 437$  ،  $e = 438$  ،  $d = 439$  ،  $c = 440$  ،  $b = 441$  ،  $a = 442$  ،  $z = 443$  ،  $y = 444$  ،  $x = 445$  ،  $w = 446$  ،  $v = 447$  ،  $u = 448$  ،  $t = 449$  ،  $s = 450$  ،  $r = 451$  ،  $q = 452$  ،  $p = 453$  ،  $o = 454$  ،  $n = 455$  ،  $m = 456$  ،  $l = 457$  ،  $k = 458$  ،  $j = 459$  ،  $i = 460$  ،  $h = 461$  ،  $g = 462$  ،  $f = 463$  ،  $e = 464$  ،  $d = 465$  ،  $c = 466$  ،  $b = 467$  ،  $a = 468$  ،  $z = 469$  ،  $y = 470$  ،  $x = 471$  ،  $w = 472$  ،  $v = 473$  ،  $u = 474$  ،  $t = 475$  ،  $s = 476$  ،  $r = 477$  ،  $q = 478$  ،  $p = 479$  ،  $o = 480$  ،  $n = 481$  ،  $m = 482$  ،  $l = 483$  ،  $k = 484$  ،  $j = 485$  ،  $i = 486$  ،  $h = 487$  ،  $g = 488$  ،  $f = 489$  ،  $e = 490$  ،  $d = 491$  ،  $c = 492$  ،  $b = 493$  ،  $a = 494$  ،  $z = 495$  ،  $y = 496$  ،  $x = 497$  ،  $w = 498$  ،  $v = 499$  ،  $u = 500$  ،  $t = 501$  ،  $s = 502$  ،  $r = 503$  ،  $q = 504$  ،  $p = 505$  ،  $o = 506$  ،  $n = 507$  ،  $m = 508$  ،  $l = 509$  ،  $k = 510$  ،  $j = 511$  ،  $i = 512$  ،  $h = 513$  ،  $g = 514$  ،  $f = 515$  ،  $e = 516$  ،  $d = 517$  ،  $c = 518$  ،  $b = 519$  ،  $a = 520$  ،  $z = 521$  ،  $y = 522$  ،  $x = 523$  ،  $w = 524$  ،  $v = 525$  ،  $u = 526$  ،  $t = 527$  ،  $s = 528$  ،  $r = 529$  ،  $q = 530$  ،  $p = 531$  ،  $o = 532$  ،  $n = 533$  ،  $m = 534$  ،  $l = 535$  ،  $k = 536$  ،  $j = 537$  ،  $i = 538$  ،  $h = 539$  ،  $g = 540$  ،  $f = 541$  ،  $e = 542$  ،  $d = 543$  ،  $c = 544$  ،  $b = 545$  ،  $a = 546$  ،  $z = 547$  ،  $y = 548$  ،  $x = 549$  ،  $w = 550$  ،  $v = 551$  ،  $u = 552$  ،  $t = 553$  ،  $s = 554$  ،  $r = 555$  ،  $q = 556$  ،  $p = 557$  ،  $o = 558$  ،  $n = 559$  ،  $m = 560$  ،  $l = 561$  ،  $k = 562$  ،  $j = 563$  ،  $i = 564$  ،  $h = 565$  ،  $g = 566$  ،  $f = 567$  ،  $e = 568$  ،  $d = 569$  ،  $c = 570$  ،  $b = 571$  ،  $a = 572$  ،  $z = 573$  ،  $y = 574$  ،  $x = 575$  ،  $w = 576$  ،  $v = 577$  ،  $u = 578$  ،  $t = 579$  ،  $s = 580$  ،  $r = 581$  ،  $q = 582$  ،  $p = 583$  ،  $o = 584$  ،  $n = 585$  ،  $m = 586$  ،  $l = 587$  ،  $k = 588$  ،  $j = 589$  ،  $i = 590$  ،  $h = 591$  ،  $g = 592$  ،  $f = 593$  ،  $e = 594$  ،  $d = 595$  ،  $c = 596$  ،  $b = 597$  ،  $a = 598$  ،  $z = 599$  ،  $y = 600$  ،  $x = 601$  ،  $w = 602$  ،  $v = 603$  ،  $u = 604$  ،  $t = 605$  ،  $s = 606$  ،  $r = 607$  ،  $q = 608$  ،  $p = 609$  ،  $o = 610$  ،  $n = 611$  ،  $m = 612$  ،  $l = 613$  ،  $k = 614$  ،  $j = 615$  ،  $i = 616$  ،  $h = 617$  ،  $g = 618$  ،  $f = 619$  ،  $e = 620$  ،  $d = 621$  ،  $c = 622$  ،  $b = 623$  ،  $a = 624$  ،  $z = 625$  ،  $y = 626$  ،  $x = 627$  ،  $w = 628$  ،  $v = 629$  ،  $u = 630$  ،  $t = 631$  ،  $s = 632$  ،  $r = 633$  ،  $q = 634$  ،  $p = 635$  ،  $o = 636$  ،  $n = 637$  ،  $m = 638$  ،  $l = 639$  ،  $k = 640$  ،  $j = 641$  ،  $i = 642$  ،  $h = 643$  ،  $g = 644$  ،  $f = 645$  ،  $e = 646$  ،  $d = 647$  ،  $c = 648$  ،  $b = 649$  ،  $a = 650$  ،  $z = 651$  ،  $y = 652$  ،  $x = 653$  ،  $w = 654$  ،  $v = 655$  ،  $u = 656$  ،  $t = 657$  ،  $s = 658$  ،  $r = 659$  ،  $q = 660$  ،  $p = 661$  ،  $o = 662$  ،  $n = 663$  ،  $m = 664$  ،  $l = 665$  ،  $k = 666$  ،  $j = 667$  ،  $i = 668$  ،  $h = 669$  ،  $g = 670$  ،  $f = 671$  ،  $e = 672$  ،  $d = 673$  ،  $c = 674$  ،  $b = 675$  ،  $a = 676$  ،  $z = 677$  ،  $y = 678$  ،  $x = 679$  ،  $w = 680$  ،  $v = 681$  ،  $u = 682$  ،  $t = 683$  ،  $s = 684$  ،  $r = 685$  ،  $q = 686$  ،  $p = 687$  ،  $o = 688$  ،  $n = 689$  ،  $m = 690$  ،  $l = 691$  ،  $k = 692$  ،  $j = 693$  ،  $i = 694$  ،  $h = 695$  ،  $g = 696$  ،  $f = 697$  ،  $e = 698$  ،  $d = 699$  ،  $c = 700$  ،  $b = 701$  ،  $a = 702$  ،  $z = 703$  ،  $y = 704$  ،  $x = 705$  ،  $w = 706$  ،  $v = 707$  ،  $u = 708$  ،  $t = 709$  ،  $s = 710$  ،  $r = 711$  ،  $q = 712$  ،  $p = 713$  ،  $o = 714$  ،  $n = 715$  ،  $m = 716$  ،  $l = 717$  ،  $k = 718$  ،  $j = 719$  ،  $i = 720$  ،  $h = 721$  ،  $g = 722$  ،  $f = 723$  ،  $e = 724$  ،  $d = 725$  ،  $c = 726$  ،  $b = 727$  ،  $a = 728$  ،  $z = 729$  ،  $y = 730$  ،  $x = 731$  ،  $w = 732$  ،  $v = 733$  ،  $u = 734$  ،  $t = 735$  ،  $s = 736$  ،  $r = 737$  ،  $q = 738$  ،  $p = 739$  ،  $o = 740$  ،  $n = 741$  ،  $m = 742$  ،  $l = 743$  ،  $k = 744$  ،  $j = 745$  ،  $i = 746$  ،  $h = 747$  ،  $g = 748$  ،  $f = 749$  ،  $e = 750$  ،  $d = 751$  ،  $c = 752$  ،  $b = 753$  ،  $a = 754$  ،  $z = 755$  ،  $y = 756$  ،  $x = 757$  ،  $w = 758$  ،  $v = 759$  ،  $u = 760$  ،  $t = 761$  ،  $s = 762$  ،  $r = 763$  ،  $q = 764$  ،  $p = 765$  ،  $o = 766$  ،  $n = 767$  ،  $m = 768$  ،  $l = 769$  ،  $k = 770$  ،  $j = 771$  ،  $i = 772$  ،  $h = 773$  ،  $g = 774$  ،  $f = 775$  ،  $e = 776$  ،  $d = 777$  ،  $c = 778$  ،  $b = 779$  ،  $a = 780$  ،  $z = 781$  ،  $y = 782$  ،  $x = 783$  ،  $w = 784$  ،  $v = 785$  ،  $u = 786$  ،  $t = 787$  ،  $s = 788$  ،  $r = 789$  ،  $q = 790$  ،  $p = 791$  ،  $o = 792$  ،  $n = 793$  ،  $m = 794$  ،  $l = 795$  ،  $k = 796$  ،  $j = 797$  ،  $i = 798$  ،  $h = 799$  ،  $g = 800$  ،  $f = 801$  ،  $e = 802$  ،  $d = 803$  ،  $c = 804$  ،  $b = 805$  ،  $a = 806$  ،  $z = 807$  ،  $y = 808$  ،  $x = 809$  ،  $w = 810$  ،  $v = 811$  ،  $u = 812$  ،  $t = 813$  ،  $s = 814$  ،  $r = 815$  ،  $q = 816$  ،  $p = 817$  ،  $o = 818$  ،  $n = 819$  ،  $m = 820$  ،  $l = 821$  ،  $k = 822$  ،  $j = 823$  ،  $i = 824$  ،  $h = 825$  ،  $g = 826$  ،  $f = 827$  ،  $e = 828$  ،  $d = 829$  ،  $c = 830$  ،  $b = 831$  ،  $a = 832$  ،  $z = 833$  ،  $y = 834$  ،  $x = 835$  ،  $w = 836$  ،  $v = 837$  ،  $u = 838$  ،  $t = 839$  ،  $s = 840$  ،  $r = 841$  ،  $q = 842$  ،  $p = 843$  ،  $o = 844$  ،  $n = 845$  ،  $m = 846$  ،  $l = 847$  ،  $k = 848$  ،  $j = 849$  ،  $i = 850$  ،  $h = 851$  ،  $g = 852$  ،  $f = 853$  ،  $e = 854$  ،  $d = 855$  ،  $c = 856$  ،  $b = 857$  ،  $a = 858$  ،  $z = 859$  ،  $y = 860$  ،  $x = 861$  ،  $w = 862$  ،  $v = 863$  ،  $u = 864$  ،  $t = 865$  ،  $s = 866$  ،  $r = 867$  ،  $q = 868$  ،  $p = 869$  ،  $o = 870$  ،  $n = 871$  ،  $m = 872$  ،  $l = 873$  ،  $k = 874$  ،  $j = 875$  ،  $i = 876$  ،  $h = 877$  ،  $g = 878$  ،  $f = 879$  ،  $e = 880$  ،  $d = 881$  ،  $c = 882$  ،  $b = 883$  ،  $a = 884$  ،  $z = 885$  ،  $y = 886$  ،  $x = 887$  ،  $w = 888$  ،  $v = 889$  ،  $u = 890$  ،  $t = 891$  ،  $s = 892$  ،  $r = 893$  ،  $q = 894$  ،  $p = 895$  ،  $o = 896$  ،  $n = 897$  ،  $m = 898$  ،  $l = 899$  ،  $k = 900$  ،  $j = 901$  ،  $i = 902$  ،  $h = 903$  ،  $g = 904$  ،  $f = 905$  ،  $e = 906$  ،  $d = 907$  ،  $c = 908$  ،  $b = 909$  ،  $a = 910$  ،  $z = 911$  ،  $y = 912$  ،  $x = 913$  ،  $w = 914$  ،  $v = 915$  ،  $u = 916$  ،  $t = 917$  ،  $s = 918$  ،  $r = 919$  ،  $q = 920$  ،  $p = 921$  ،  $o = 922$  ،  $n = 923$  ،  $m = 924$  ،  $l = 925$  ،  $k = 926$  ،  $j = 927$  ،  $i = 928$  ،  $h = 929$  ،  $g = 930$  ،  $f = 931$  ،  $e = 932$  ،  $d = 933$  ،  $c = 934$  ،  $b = 935$  ،  $a = 936$  ،  $z = 937$  ،  $y = 938$  ،  $x = 939$  ،  $w = 940$  ،  $v = 941$  ،  $u = 942$  ،  $t = 943$  ،  $s = 944$  ،  $r = 945$  ،  $q = 946$  ،  $p = 947$  ،  $o = 948$  ،  $n = 949$  ،  $m = 950$  ،  $l = 951$  ،  $k = 952$  ،  $j = 953$  ،  $i = 954$  ،  $h = 955$  ،  $g = 956$  ،  $f = 957$  ،  $e = 958$  ،  $d = 959$  ،  $c = 960$  ،  $b = 961$  ،  $a = 962$  ،  $z = 963$  ،  $y = 964$  ،  $x = 965$  ،  $w = 966$  ،  $v = 967$  ،  $u = 968$  ،  $t = 969$  ،  $s = 970$  ،  $r = 971$  ،  $q = 972$  ،  $p = 973$  ،  $o$



$$\textcircled{6} \quad \left. \begin{array}{l} \text{إذا كانت الدالة } D(s) = (s-1)^2 + 4 \\ \text{صعدا} \quad \text{من } 1 \text{ إلى } 3 \\ \text{منحنا} \quad \text{من } 1 \text{ إلى } 3 \end{array} \right\}$$

قابلة للتفاضل عند  $s = 1$  فإن  $s = 1$  له ...

$$[1, 2, 3]$$

$$\textcircled{7} \quad \text{إذا كان } s = 3 \text{ فإن } \frac{1}{s} = \dots$$

$$\left[ \frac{1}{s}, \frac{1}{s-1}, \frac{1}{s-2}, \frac{1}{s-3} \right]$$

$$\textcircled{8} \quad \text{إذا كانت } s = \frac{1-3}{2} \text{ فإن } s = \frac{1}{2}$$

$$[1, 2, 3]$$

### مسائل تقيس مستويي عياف التفاضل

أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة  $s = 3 - 3$  عند النقطة  $(2, 2)$

$$\textcircled{9} \quad \text{أوجد المشتقة الأولى للدالة } s = \frac{1}{s} + 1$$

إذا كان ميل المماس للمنحنى  $s = \frac{1}{s} + 1$  عند النقطة  $(3, 1)$  الواقعة عليه  $s = 4$

فأوجد قيمتي  $s$  و  $t$

٢٠٠٩



## مشتقة دالة الدالة ( قاعدة السلسلة )

الحل

٤

إذا كانت  $y = f(u)$  حيث  $u$  قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $x$ ، عند حقيقى

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

أو أن مشتقة قوس  $u = f(u)$  (القوس)  $\times$  مشتقة ما بداخل القوس

فمثلاً

$$\text{إذا كانت } y = (3x^2 + 5)^4$$

$$\text{فإن } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \text{ (القوس) } \times \text{مشتقة ما بداخل القوس}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = (3x^2 + 5)^3 \times (6x) = 6x(3x^2 + 5)^3$$



ملاحظات

○ إذا كانت من دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى  $x$

$$\text{فإن } \frac{d}{dx} (u^v) = v \cdot u^{v-1} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\text{فمثلاً } \frac{d}{dx} (x^2) = 2 \cdot x^{2-1} \cdot \frac{dx}{dx}$$

○ يمكن ملاحظة أنه إذا كانت  $u = f(x)$  حيث  $d(x) < 0$

$$\text{فإن } \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{f(x)} \right) = -\frac{1}{(f(x))^2} \cdot d'f(x)$$

أو أن مشتقة الجذر التربيعي للدالة  $= \frac{1}{2\sqrt{u}} \times$  مشتقة ما تحت الجذر

مثال

أوجد المشتقة الأولى لدالة:  $y = (x^2 + 3)^4$

الحل

$$y = (x^2 + 3)^4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 4(x^2 + 3)^3 \times 2x = 8x(x^2 + 3)^3$$

مثال

إذا كانت  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  فأوجد  $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$



### مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى للدالة  $y = (2 + \sin x)^3 (3 - \sin x)^4$

### الحل

من  $y =$  الدالة الأولى  $\times$  مشتقة الثانية + الدالة الثانية  $\times$  مشتقة الأولى

$$y' = (2 + \sin x)^3 (3 - \sin x)^4 + [3 - \sin x]^4 \times 3 (2 + \sin x)^2 \cos x + [2 + \sin x]^3 \times 4 (3 - \sin x)^3 \cos x$$

$$= (2 + \sin x)^2 (3 - \sin x)^3 \{ (2 + \sin x) + 3(3 - \sin x) + 4(2 + \sin x)(3 - \sin x) \}$$

$$= (2 + \sin x)^2 (3 - \sin x)^3 (21 - 8)$$

### مثال ٤

إذا كان  $y = \left( \frac{2 - \sin^2 x}{3 + \sin^2 x} \right)^7$  أوجد  $\frac{dy}{dx}$

### الحل

$$y = \left( \frac{2 - \sin^2 x}{3 + \sin^2 x} \right)^7$$

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{2 - \sin^2 x}{3 + \sin^2 x} \right)^6 \times \frac{(2 - \sin^2 x)' (3 + \sin^2 x) - (2 - \sin^2 x) (3 + \sin^2 x)'}{(3 + \sin^2 x)^2}$$

$$= \left( \frac{2 - \sin^2 x}{3 + \sin^2 x} \right)^6 \times \frac{(-2 \sin x \cos x) (3 + \sin^2 x) - (2 - \sin^2 x) (2 \sin x \cos x)}{(3 + \sin^2 x)^2}$$

$$= \frac{-2 \sin x \cos x (2 - \sin^2 x + 3 + \sin^2 x)}{(3 + \sin^2 x)^2} = \frac{-2 \sin x \cos x}{(3 + \sin^2 x)^2}$$



إذا كان  $x = y$  دالتين حيث  $x = d(x)$ ،  $y = f(y)$  فإن  $x = d[f(y)]$  وبقول  $y$  دالة الدالة  $x$  ولايجاد مشتقة  $d[f(y)]$  يمكن اتباع النظرية التالية:

إذا كانت  $x = d(x)$  قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير  $x$  وكانت  $y = f(y)$  قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير  $y$  فإن  $x = d[f(y)]$  تكون قابلة للإشتقاق بالنسبة للمتغير  $y$  ويكون

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy} \quad (\text{نحرك هذه النظرية بقدر عدة السلسلة})$$

### مثال

إذا كان  $x = e^x$ ،  $y = x^2 + 2$  أوجد  $\frac{dx}{dy}$

### الحل

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$

$$x^2 + 2 = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$

### مثال

إذا كانت  $x = e^x$ ،  $y = x^2 - 3$  أوجد  $\frac{dx}{dy}$  عند  $x = 4$

### الحل

بالنعوض عن  $x$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy} = \frac{dx}{dx} \times \frac{dy}{dy}$$



$$\frac{و}{س} = \frac{3(2-س) \times 2 \sqrt{3-س^2}}{3-س^2}$$

$$\text{عند } س = 4 \text{ يكون } \frac{و}{س} = \frac{3(2-4) \times 2 \sqrt{3-16}}{3-16} = \frac{و}{س} = 2 \times 5 \times 2 = 20$$

حل آخر

$$\frac{و}{ع} = \frac{6 \times 2}{6 \times 2} = \frac{و}{ع} = \frac{2-س^2}{2(2-س^2)}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{و}{ع} \times \frac{ع}{س}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{2-س^2}{2(2-س^2)} \times \frac{6 \times 2}{6 \times 2} = \frac{2-س^2}{2(2-س^2)} \times \frac{3(2-س) \times 2 \sqrt{3-س^2}}{3-س^2}$$

$$= \frac{3(2-س) \times 2 \sqrt{3-س^2}}{3-س^2}$$

$$\text{عند } س = 4 \text{ يكون } \frac{و}{س} = \frac{3(2-4) \times 2 \sqrt{3-16}}{3-16} = 20$$

مثال (٧)

$$\text{إذا كانت } س = \frac{1-ع}{1+ع} \text{، فأوجد } \frac{و}{س}$$

الحل

يمكن الحل بطريقتين كما في المثال السابق ولكن الطريقة الأسهل هي التعويض أولاً

$$\therefore س = \frac{1-1+س}{1+1+س} = \frac{س}{2+س}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{1-(2+س)}{(2+س)^2}$$

$$\therefore \frac{و}{س} = \frac{2}{(2+س)^2}$$



### مثال

أوجد كلاً مما يأتي حيث أن ما بداخل الأقواس نوال وليست ثوابت:

- ١  $\frac{3}{5}$  (س ١)      ٢  $\frac{4}{5}$  (س ٣)      ٣  $\frac{5}{8}$  (س ٤)  
٤  $\frac{6}{5}$  (س ٣)      ٥  $\frac{9}{5}$  (ك ١٧)      ٦  $\frac{1}{5}$  (س)

### الحل

- ١  $\frac{3}{5}$  (س ١) = ١ س ٣  $\times \frac{5}{5}$  (تشتقها كدالة مثل (دالة في قوس ١)  
٢  $\frac{4}{5}$  (س ٣) = ٣ س ٢  $\times \frac{5}{5}$  (لاحظ أن الاشتقاق بالنسبة إلى س)  
٣  $\frac{5}{8}$  (س ٤) = ٤ س ٥  $\times \frac{5}{8}$   
٤  $\frac{6}{5}$  (س ٣) = ٣ س ٦  
٥  $\frac{9}{5}$  (ك ١٧) = ١٧  $\times \frac{5}{5}$   
٦  $\frac{1}{5}$  (س) = ١  $\times \frac{5}{5}$  =  $\frac{5}{5}$  (سقط من ٥ ولا تكتبها)

### مثال

إذا كان  $س^3 = س^2 + س + ١$  فأوجد  $\frac{د}{دس}$

### الحل

∴  $س^3 = س^2 + س + ١$  بأخذ مشتقة الطرفين بالنسبة إلى س

$$∴ ٣ س^٢ = ٢ س + ١$$

$$∴ \frac{د}{دس} = \frac{٢ س + ١}{٣ س^٢} = \frac{٢ س + ١}{٣ (س^٢ + س + ١)}$$







المتغير  
الذي  
يغير  
القيمة

اجمع معك واختر نفسك

المتغير



اختيار بركمى

اجب عن الاسئلة تانيه

١ متوسط تغير الدالة د حيث  $d = (س) = س^2 + 2س + 8$  عندما تتغير س  
من ١ الى ٣ يساوى .....  
[ ١ ٤ ٣ ٧ ٦ ]

٢  $\frac{1}{س} = (س^3) = \dots\dots\dots$   
[  $\frac{1}{س^2}$  ٢  $\frac{1}{س^3}$  ٣  $\frac{1}{س^4}$  ٤  $\frac{1}{س^5}$  ]

٣ ميل المماس للمحنى  $س = \frac{1}{س}$  عندما  $س = -١$  يساوى .....  
[ ١ ٤ ١- ٥ صفر ٦ ٢ ]

٤ قياس لزاوية التي يصنعها المماس للمحنى  $س = 2س^2 - 9س$  مع الاتجاه  
الموجب لمحور السينات عند  $س = ١$  تساوى .....  
[ ١٥ ٤ ٣٠ ٦ ١٣٥ ]

٥ إذا كان  $س = (٢س - ١)(س^2 + ٣)$  فأوجد  $\frac{1}{س}$

٦ أوجد معدل التغير للدالة د حيث  $d = (س) = 3س - 1$  عندما  $س = 1$



مسائل المستوى الأول

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

- ①  $y = (x^2 + 3)^2$  د (س) =  $(x^2 + 3)^2$
- ②  $y = (x^2 - 2)^2$  د (س) =  $(x^2 - 2)^2$
- ③  $y = 2\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$  ص =  $2\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$
- ④  $y = 2\left(\frac{x^2}{1 + x}\right)$  ص =  $2\left(\frac{x^2}{1 + x}\right)$
- ⑤  $y = x^2(1 - x)$  ص =  $x^2(1 - x)$
- ⑥  $y = \sqrt{x^2 + 3}$  ص =  $\sqrt{x^2 + 3}$

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

- ① إذا كانت  $y = (x^2 + 3)^2$  فإن  $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$   
 $[2(x^2 + 3)^2 \quad 4(x^2 + 3)^2 \quad 2(x^2 + 3) \quad 4(x^2 + 3)]$
- ② إذا كان  $\frac{y}{x} = 3$ ،  $\frac{dy}{dx} = 2$  فإن  $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$   
 $[0 \quad 2 \quad 1 \quad \frac{3}{2}]$
- ③ إذا كان  $y = (x^2 + 1)^3$  فإن  $y' = \dots\dots\dots$   
 $[4x^2 \quad 12x^2 \quad 6x^2 \quad 3x^2]$
- ④ إذا كان  $y = (x^2 - 5)^4$  فإن  $y' = \dots\dots\dots$   
 $[4x^2 - 4 \quad 4x^2 - 4 \quad 4x^2 - 4 \quad 4x^2 - 4]$
- ⑤ إذا كان  $y = (1 + x)^3$ ،  $x = 3$  فإن  $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$   
 $[3 \quad 9 \quad 27 \quad 3(1 + x)^2]$
- ⑥ إذا كان  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ ،  $x = 1$  فإن  $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$   
 $[0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$
- ⑦ إذا كان  $y = x^2$  فإن  $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$   
 $[\frac{2}{x^3} \quad \frac{2}{x^2} \quad \frac{2}{x} \quad \frac{1}{x^2}]$



٨) إذا كان  $x = \sqrt{2 - x}$  فإن  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1-x}{x} \text{ د } 1- \text{ د } 2-x \text{ د } 1- \text{ د } 2-x \right]$

٩) إذا كان  $(x + x^2) = 5$  فإن  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$

$\left[ 1- \text{ د } 5 \text{ د } 3 \text{ د } 5 \right]$

١٠) إذا كان  $\frac{x}{x-1} = 4 - x$ ،  $\frac{x}{x-1} = 2 + x$  فإن  $\frac{x}{x-1} = \dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1}{x} \text{ د } \frac{1}{x-1} \text{ د } 2- \text{ د } 2 \right]$

### مسائل المستوى الثاني

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١)  $y = (x^2 + 5)^6$       ٢)  $y = (x^2 - 3)^2$   
٣)  $y = (x^3 + x - 9)^5$       ٤)  $y = (x - \frac{2}{x})^4$

٥ اختر لإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة.

١) مشتقة الدالة  $y = (x - \sqrt{x})$  عند  $x = 4$  يساوي  $\dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{2}{3} \text{ د } \frac{1}{3} \right]$

٢) مشتقة الدالة  $y = (x^3 - 3)^2$  عند  $x = 2$  يساوي  $\dots\dots\dots$

$\left[ 1- \text{ د } 1 \text{ د } 5 \text{ د } 2- \right]$

٣) مشتقة الدالة  $y = (x^3 + x^2 - 2)^2$  عند  $x = 1$  يساوي  $\dots\dots\dots$

$\left[ 1- \text{ د } 1 \text{ د } 5 \text{ د } 2- \right]$

٤) مشتقة الدالة  $y = (x^3 + x^2 + 3x + 2)^2$  عند  $x = 2$  يساوي  $\dots\dots\dots$

$\left[ 2- \text{ د } 4 \text{ د } \frac{5}{2} \text{ د } \frac{3}{2} \right]$

٦ أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

١)  $y = (x^2 - 2)^2$       ٢)  $y = (x - 3)^2 (x - 2)^2$   
٣)  $y = (x^3 + 1)^4 (x + 2)^2$       ٤)  $y = (x^2 + 1)^2$   
٥)  $y = (x^2 + 1)^2 (x^2 - 1)^2$       ٦)  $y = (x + 1)^2 (x - 1)^2$



أوجد المشتقة الأولى لكل من النوال الآتية:

②  $y = \left( \frac{1-s}{1+s} \right)^2$  من  $\frac{y}{s}$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

①  $y = \left( \frac{3+s}{s} \right)^2$  من  $\frac{y}{s}$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

④  $y = \left( \frac{2}{s-2} \right)^2$  من  $\frac{y}{s}$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

③  $y = \left( \frac{2-s^2}{1+s} \right)^2$  من  $\frac{y}{s}$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

فأوجد  $\frac{y}{s}$

⑩ إذا كان  $y = 2x^2 - 3x + 2$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

فأوجد  $\frac{y}{s}$

⑪ إذا كان  $y = 2x^2 + 8x - 11$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

فأوجد  $\frac{y}{s}$

⑫ إذا كان  $y = 2x^2 - 3x + 2$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

فأوجد  $\frac{y}{s}$

⑬ إذا كان  $y = 2x^2 + x + 1$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

فأوجد  $\frac{y}{s}$

⑭ إذا كان  $y = 3x^2 - x + 1$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

⑮ إذا كان  $y = \frac{1+x}{1-x}$  فأوجد  $\frac{y}{s}$  عندما  $s = 2$

⑯ إذا كان  $y = \frac{x}{s^2} = 4 - 3x + 2x^2$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

فأوجد  $\frac{y}{s}$  عندما  $s = 2$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

⑰ إذا كان  $y = s^2 + 1 + x$  فأوجد  $\frac{y}{s}$  عندما  $x = 1$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

⑱ إذا كان  $y = 2x^2 + 3x - 4$  فأوجد  $\frac{y}{s}$  عندما  $s = 1$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

⑲ إذا كانت  $y = 2x^2 + x + 1$  فأوجد  $\frac{y}{s}$  عند  $s = 1$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

⑳ إذا كانت  $y = \frac{1-x}{1+x}$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

㉑ إذا كان  $y = \frac{1}{s^2} + 5s - 12x = 2x^2 + 1x - 1$  فأوجد  $\frac{y}{s}$

$\left[ \frac{1}{s} \right]$

㉒ إذا كانت  $y = 2x^2 - 3x + 4$  فأوجد  $\frac{y}{s}$  عند  $s = 1$



٢٣ إذا كان  $x = 2$ ،  $y = 3$ ،  $z = 5$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(2, 3, 5)$  على هذا المنحنى (١)

٢٤ إذا كان  $x = 3$ ،  $y = 4$ ،  $z = 5$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(3, 4, 5)$  على هذا المنحنى (١)

٢٥ إذا كان  $x = 4$ ،  $y = 5$ ،  $z = 6$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(4, 5, 6)$  على هذا المنحنى (١)

٢٦ أوجد ميل المماس لمنحنى  $\left(\frac{x+y}{1+x}\right)^2$  عند النقطة  $(2, 3)$  على هذا المنحنى (١)

٢٧ إذا كان  $x = 2$ ،  $y = 3$ ،  $z = 5$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(2, 3, 5)$  على هذا المنحنى (١)

٢٨ إذا كان  $x = 3$ ،  $y = 4$ ،  $z = 5$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(3, 4, 5)$  على هذا المنحنى (١)

٢٩ إذا كان  $x = 4$ ،  $y = 5$ ،  $z = 6$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(4, 5, 6)$  على هذا المنحنى (١)

٣٠ إذا كان  $x = 5$ ،  $y = 6$ ،  $z = 7$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(5, 6, 7)$  على هذا المنحنى (١)

٣١ إذا كان  $x = 6$ ،  $y = 7$ ،  $z = 8$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(6, 7, 8)$  على هذا المنحنى (١)

٣٢ إذا كان  $x = 7$ ،  $y = 8$ ،  $z = 9$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(7, 8, 9)$  على هذا المنحنى (١)

٣٣ إذا كان  $x = 8$ ،  $y = 9$ ،  $z = 10$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(8, 9, 10)$  على هذا المنحنى (١)

٣٤ إذا كان  $x = 9$ ،  $y = 10$ ،  $z = 11$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(9, 10, 11)$  على هذا المنحنى (١)

٣٥ إذا كان  $x = 10$ ،  $y = 11$ ،  $z = 12$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(10, 11, 12)$  على هذا المنحنى (١)

٣٦ إذا كان  $x = 11$ ،  $y = 12$ ،  $z = 13$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(11, 12, 13)$  على هذا المنحنى (١)

٣٧ إذا كان  $x = 12$ ،  $y = 13$ ،  $z = 14$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(12, 13, 14)$  على هذا المنحنى (١)

٣٨ إذا كان  $x = 13$ ،  $y = 14$ ،  $z = 15$ ،  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$  فأنبت أن  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$  عند النقطة  $(13, 14, 15)$  على هذا المنحنى (١)



ليست لكافة مشتقة له اداة

① إذا كان  $s^1 = s^2$  فإن:  $\frac{s}{s} = \dots$

$$\left[ \frac{2}{s}, \frac{s^2}{s}, \frac{s^3}{s}, \frac{s^4}{s} \right]$$

② إذا كان  $s = (s + 1)^2$ ،  $\frac{s}{s} = 12$  عند  $s = 1$  صفراً فإن  $\dots$

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$$

③ إذا كان  $s = \frac{1}{1-s}$ ،  $\frac{s}{s} = 2$ ،  $\frac{s}{s} = \dots$  فإن  $\frac{s}{s} = \dots$

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$$

④ يُصب زيت بمعدل  $90 \text{ لتر/س}$  في برميل أسطوانى الشكل طول نصف قطره  $1 \text{ م}$ ،  $\frac{s}{s} = \dots$  فإن معدل ارتفاع الزيت في البرميل  $\dots$

$$\left[ \frac{1}{\pi \cdot 81}, \frac{1}{\pi \cdot 81}, \frac{1}{81}, \pi \cdot 81 \right]$$

### مسائل تقبيل مستويات عمياء في التفكيك

أوجد،  $\frac{s}{s}$

إذا كان  $s = \frac{s(1+s)}{1+(1+s)}$

إذا كان  $s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^7 + s^8 + s^9 + s^{10} = 1$  فأوجد،  $\frac{s}{s}$

إذا كان  $x = \frac{1}{s} + s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6 + s^7 + s^8 + s^9 + s^{10} = 4$

أوجد،  $\frac{s}{s}$  عند  $s = 1$

$$\left[ \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \right]$$

إذا كان  $(s + 3)^2 = (s - 1)^2$  فائت أن،  $\frac{s}{s} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4-s}$

إذا كانت  $s = \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2$ ،  $x = s + s^2 + s^3$  فأوجد،  $\frac{s}{s}$  عند  $s = 1$

إذا كان  $s = s^2 + 1 = x$ ،  $1 - s^2 = x$  فائت أن،  $\frac{s}{s} = \frac{2}{x}$

إذا كانت  $s = s^2 + s$ ،  $x = \frac{1-s}{s}$  فأوجد،  $\frac{s}{s}$  عند  $s = 1$

إذا كانت  $s = \left( \frac{s^2 - 2}{s^2 + 2} \right)^2$  فائت أن،  $\frac{s}{s} = \frac{8}{s^2 - 4}$



## مشتقات الدوال المثلثية

الأول

٥

مشتقة دالة الجيب

$$\text{لنا علاقات } d = (s) = \text{ها س} \quad \text{فإن } d'(s) = \text{ها س}$$

البرهان غير مفيد على الطالب،

$$d(s) = \text{ها س} \Rightarrow d'(s) = (s + \pi) = \text{ها} (s + \pi)$$

$$\therefore d'(s) = (s) = \text{ها س} \Rightarrow d'(s) = (s + \pi) = \text{ها} (s + \pi)$$

$$= \frac{\text{ها س} \times \text{ها س} + \text{ها س} \times \text{ها س}}{s}$$

$$= \frac{\text{ها س} \times \text{ها س} + \text{ها س} \times \text{ها س}}{s} = \frac{\text{ها س} \times \text{ها س} (1 + 1)}{s}$$

$$= \text{ها س} \times \text{ها س} \times \frac{2}{s} = \frac{2 \times \text{ها س} \times \text{ها س}}{s}$$

$$= \text{ها س} \times \text{ها س} \times 1 = \text{ها س}$$

$$\text{أي أن } \frac{d}{ds} (\text{ها س}) = \text{ها س}$$





### المشتقة

إذا كانت دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير  $x$ ،

$$\frac{d}{dx} [f(x)] = f'(x) \text{ هنا } \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$$

أي أن، هنا  $\frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$  مشتقة هذه الدالة

فمثلاً

$$\frac{d}{dx} [x^2] = 2x \text{ هنا } \frac{d}{dx} [x^2 + 3] = 2x \text{ هنا } \frac{d}{dx} [x^2 + 3] = 2x$$

وأيضاً إذا كانت  $y = f(x)$  فإن

$$y' = f'(x) \text{ هنا } y' = 2x \text{ هنا } y' = 2x$$

المشتقة الأولى

إذا كانت  $y = f(x)$  فإن:  $y' = f'(x)$

وبصفة عامة إذا كانت  $y = f(x)$  فإن:  $y' = f'(x)$

فمثلاً إذا كانت  $y = x^2$  فإن:  $y' = 2x$  هنا  $y' = 2x$

المشتقة دالة

إذا كانت  $y = f(x)$  فإن:  $y' = f'(x)$

وبصفة عامة إذا كانت  $y = f(x)$  فإن:  $y' = f'(x)$

فمثلاً إذا كانت  $y = x^2$  فإن:  $y' = 2x$  هنا  $y' = 2x$

### ملاحظات

$$\frac{d}{dx} \left[ \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right] = \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \times 1 = \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$



$$2) \frac{f}{g} (x) = \left( \frac{f}{g} \right)' (x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

### مثال ١

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

- ١)  $y = 2x^3$       ٢)  $y = 2x^3 + 3x^2$   
 ٣)  $y = 2x^3$       ٤)  $y = 2x^3 + 3x^2$

### الحل

- ١)  $y = 2x^3$       ٢)  $y = 2x^3 + 3x^2$   
 ٣)  $y = 2x^3$       ٤)  $y = 2x^3 + 3x^2$   
 ٥)  $y = 2x^3 + 3x^2$       ٦)  $y = 2x^3 + 3x^2$   
 ٧)  $y = 2x^3 + 3x^2$       ٨)  $y = 2x^3 + 3x^2$   
 ٩)  $y = 2x^3 + 3x^2$       ١٠)  $y = 2x^3 + 3x^2$

### مثال ٢

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

- ١)  $y = (2x + 1)^3$       ٢)  $y = 3x^2 + 2x + 1$   
 ٣)  $y = (2x + 1)^3$       ٤)  $y = 3x^2 + 2x + 1$

### الحل

- ١)  $y = (2x + 1)^3$       ٢)  $y = 3x^2 + 2x + 1$   
 ٣)  $y = (2x + 1)^3$       ٤)  $y = 3x^2 + 2x + 1$   
 ٥)  $y = (2x + 1)^3$       ٦)  $y = 3x^2 + 2x + 1$   
 ٧)  $y = (2x + 1)^3$       ٨)  $y = 3x^2 + 2x + 1$   
 ٩)  $y = (2x + 1)^3$       ١٠)  $y = 3x^2 + 2x + 1$



$$\textcircled{2} \frac{1}{\sin} = \frac{1}{\sin} \times (4 + \sin) = 4 + \sin \quad \text{فإن } 1 = 4 + \sin$$

$$\textcircled{4} \frac{1}{\sin} = \frac{1}{\sin} \times (2 + \sin) = 2 + \sin \quad \text{فإن } 1 = 2 + \sin$$

$$2 = 2 + \sin \quad \text{فإن } 0 = \sin$$

مثال ٣

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية :

$$\textcircled{1} y = (2 + \sin)^2 \quad \textcircled{2} y = (2 + \sin)^3$$

الحل

$$\textcircled{1} y = (2 + \sin)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(2 + \sin) \times \cos$$

$$y = (2 + \sin)^2 \quad \text{فإن } y' = 2(2 + \sin) \cos$$

$$\textcircled{2} y = (2 + \sin)^3 \quad \text{فإن } y' = 3(2 + \sin)^2 \cos$$

$$y = (2 + \sin)^3 \quad \text{فإن } y' = 3(2 + \sin)^2 \cos$$

مثال ٤

$$\text{إذا كانت } y = \left( \sin + \frac{\pi}{4} \right)^2 \quad \text{فأثبت أن } \frac{dy}{dx} = -2 \sin$$

الحل

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \left( \sin + \frac{\pi}{4} \right) \times \cos$$

$$y = \left( \sin + \frac{\pi}{4} \right)^2 \quad \text{فإن } y' = 2 \left( \sin + \frac{\pi}{4} \right) \cos$$

$$y = \left( \sin + \frac{\pi}{4} \right)^2 \quad \text{فإن } y' = 2 \left( \sin + \frac{\pi}{4} \right) \cos$$



## مثال

أوجد  $\frac{u}{v}$  (ما ٢ س) عند  $\pi =$

## الحل

$$d'(s) = \frac{(1 + \text{ما ٢ س}) \times 2 \text{ ما ٢ س} - \text{ما ٢ س} \times 2 - \text{ما ٢ س}}{(1 + \text{ما ٢ س})^2}$$

$$d'(s) = \pi = \frac{\pi 2 \text{ ما ٢ س} + (\pi 2 \text{ ما ٢ س}) (1 + \text{ما ٢ س})}{(1 + \text{ما ٢ س})^2}$$

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{0 \times 0 \times 2 + (1 \times 2) (1 + 1)}{(1 + 1)^2}$$

## مثال

أوجد  $\frac{u}{v}$  (إذا كان  $s = \text{ما (طا ٥ س)}$ )

## الحل

$\therefore s = \text{ما (طا ٥ س)}$  بفرض أن  $x = \text{طا ٥ س}$

فإن  $s = \text{ما } x$  ،  $x = \text{طا ٥ س}$

$\therefore \frac{u}{x} = \text{ما } x$  ،  $\frac{x}{s} = \text{طا ٥ س}$

$\therefore \frac{u}{s} = \frac{u}{x} \times \frac{x}{s} = \text{ما } x \times \text{طا ٥ س}$

$\frac{u}{s} = \text{طا ٥ س} \times \text{ما (طا ٥ س)}$

حتى آخر

$\therefore s = \text{ما (طا ٥ س)} = \text{ما (طا ٥ س)} \times \text{طا ٥ س}$



### مثال ٧

أثبت أن المماس للمنحنى  $y = \left(\frac{\pi x}{4} - \pi\right)$  عند  $x = \pi$  يصنع زاوية موجبة قياسها  $\frac{\pi}{4}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

### الحل

$$y = \left(\frac{\pi x}{4} - \pi\right)$$

عند  $x = \pi$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{4} \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\pi x}{4} - \pi\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\pi x}{4} - \pi\right)$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \theta = 1$$

$$\text{Shift Tan 1 = 45}$$

### مثال ٨

إذا كانت  $y = \frac{\pi}{4}$  أوجد معدل تغير  $y$  بالنسبة إلى  $x$  عندما  $x = \frac{\pi}{4}$

### الحل

$\therefore$  معدل تغير  $y$  بالنسبة إلى  $x = \text{ميل المماس} = \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{عندما } x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \frac{\pi}{4} \text{ عند } x = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y - \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{0}{0} = \text{مفرد}$$





أجب عن الأسئلة الآتية

① إذا كان  $\frac{x}{y} = 3$ ،  $\frac{y}{x} = 2$  فإن  $\frac{x}{y} = \dots$

[ 5 د 6 ك 1 ج 2 ب ]

② إذا كان  $d = (x - 5)$ ،  $e = (x - 2)$  فإن  $d - e = \dots$

[ 8 - د 4 - ك 4 - ج 8 - ب ]

③ إذا كان  $(x + 5) = 3$  فإن  $\frac{x}{y} = \dots$

[ 1 د صفر ك 3 ج 5 ب ]

④ إذا كان متوسط التغير في  $d = 3$ ،  $2$  عندما تتغير  $x$  من  $7$  إلى  $7.2$

فإن التغير في  $d = \dots$  [ 64 - د 64 ك 16 ج 16 ب ]

⑤ أوجد المشتقة الأولى لكل من لدوال الآتية:

(أ)  $\left( \frac{1-x}{1+x} \right)^5$  (ب)  $x^3 = 3x^2 - 1$

⑥ إذا كانت الدالة  $d$  حيث  $d = \left( \frac{1}{x} \right)$  عندما  $x > 1$  عندما  $x < 1$

متصلة عند  $x = 1$  فأوجد قيمة الثابت  $k$  ثم أبحث قابلية الاشتقاق عند  $x = 1$



الادوات

أختار

$$\text{إذا كانت } x = \frac{a}{b} \text{ فإن } \frac{a}{b} = \dots$$

$$[ \text{فاس } 1 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 3 \text{ فاس } 4 ]$$

$$\text{إذا كانت } x = (a) \text{ فما } 5 \text{ من فإن } x' = (a) \dots$$

$$[ 5 \text{ فاس } 5 \text{ فاس } 5 \text{ فاس } 5 ]$$

$$\text{إذا كان } x = \pi \text{ فما } \pi \text{ فإن } x' = \dots$$

$$[ 1 \text{ فاس } 1 \text{ فاس } 1 \text{ فاس } 1 ]$$

$$\text{إذا كانت } x = (a) \text{ فما } \frac{1}{a} \text{ من فإن } x' = \dots$$

$$\text{إذا كانت } x = (a) \text{ فما } (a + x) \text{ فإن } x' = \dots$$

$$[ 1 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 2 ]$$

$$\text{إذا كانت } x = (a) \text{ فما } (a - x) \text{ فإن } x' = \dots$$

$$[ 3 \text{ فاس } 3 \text{ فاس } 3 \text{ فاس } 3 ]$$

$$[ 3 \text{ فاس } 3 \text{ فاس } 3 \text{ فاس } 3 ]$$

$$\text{إذا كانت } x = (a) \text{ فما } (a - x) \text{ فإن } x' = \dots$$

$$[ 4 \text{ فاس } 4 \text{ فاس } 4 \text{ فاس } 4 ]$$

$$[ 4 \text{ فاس } 4 \text{ فاس } 4 \text{ فاس } 4 ]$$

$$\text{إذا كانت } x = (a) \text{ فما } (a + x) \text{ فإن } x' = \dots$$

$$[ 2 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 2 ]$$

$$[ 2 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 2 \text{ فاس } 2 ]$$

$$\text{إذا كانت } x = (a) \text{ فما } (a - x) \text{ فإن } x' = \dots$$

$$[ 3 \text{ فاس } 3 \text{ فاس } 3 \text{ فاس } 3 ]$$



⑩ إذا كانت  $(\sin)$  ط  $(\pi - \sin)$  فإن  $\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$   
 [ ٥ في  $\sqrt{2}$  في ١ في ١ في  $\sqrt{2}$  في ٥ ]

⑪ إذا كانت  $(\sin)$  ما  $\sin$  فإن  $\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dots\dots\dots$   
 [ صفر في ١ في ١ في ١ في  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  ]

اختر الزجاجة الصحيحة من بين الخيارات المعطاه .

①  $\frac{f}{\sin} = (\sin - \sin)$   $\dots\dots\dots$   
 [ -  $\sin + \sin$  في  $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$  ]  
 -  $\sin - \sin$  في  $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$  ]

②  $\frac{f}{\sin} = (\sin + \sin)$   $\dots\dots\dots$   
 [ ٥  $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$  ]  
 [ ٥  $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$  ]

③  $\frac{f}{\sin} = (\sin)$   $\dots\dots\dots$   
 [  $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$  ]  
 [  $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$   $\sin$  ]

④  $\frac{f}{\sin} = \left(\frac{\pi}{2}\right)$   $\dots\dots\dots$   
 [  $\frac{\pi}{2}$  في ١ في ١ في ١ في صفر ]

⑤  $\frac{f}{\sin} = (\pi)$   $\dots\dots\dots$   
 [ صفر في ١ في ١ في ١ في  $\pi$  ]

⑥  $\frac{f}{\sin} = (\sin + \sin)$   $\dots\dots\dots$   
 [ صفر في ١ في ١ في ١ في  $\sin$  ]

⑦  $\frac{f}{\sin} = (\sin + \sin)$   $\dots\dots\dots$   
 [ صفر في ١ في ١ في ١ في  $\sin$  ]

⑧  $\frac{f}{\sin} = (\sin - \sin)$   $\dots\dots\dots$   
 [  $\sin$  في  $\sin$  في  $\sin$  في  $\sin$  في  $\sin$  ]



$$⑨ \frac{d}{dx} \left( \frac{y^2}{x^2} \right) = \dots\dots\dots$$

[طاس د قاس د طاس د - قاس د]

$$⑩ \frac{d}{dx} (y^2 - 7x^2) = \dots\dots\dots$$

[منا (7-3س<sup>2</sup>) د - 6س منا (7-3س<sup>2</sup>) د  
6س منا (7-3س<sup>2</sup>) د]

$$⑪ \frac{d}{dx} (2y^2 - 9) = \dots\dots\dots$$

[2س د 2س د 2س د - 2س د - 2س د]

$$⑫ \frac{d}{dx} (2y^2 - 2y^2) = \dots\dots\dots$$

[2س د 2س د 2س د - 2س د 2س د]

$$⑬ \frac{d}{dx} (2y^2 - 8y^2) = \dots\dots\dots$$

[8س د 2س د 2س د + 2س د 2س د  
منا 4س د 2س د 8س د 2س د + 2س د]

$$⑭ \frac{d}{dx} \left( \frac{y^2 - 1}{1 - y} \right) = \dots\dots\dots$$

[- ما د د ما د د منا د - منا د]

1 أوجد المشتقة الأولى لكل من التوالى الآتية:

- |                           |                          |
|---------------------------|--------------------------|
| ① س = ما 3س               | ② س = ما $\frac{1}{3}$ س |
| ③ س = منا $\frac{1}{3}$ س | ④ س = ما (4س + 7)        |
| ⑤ س - ما (3س + 3)         | ⑥ س = منا (5س + 3)       |
| ⑦ س = 3ط (2س + 3)         | ⑧ س - ط (-5س + 19)       |

### مسائل المستوى الثانى

2 أوجد  $\frac{dy}{dx}$  و  $\frac{dx}{dy}$  إذا كانت:

- |             |              |
|-------------|--------------|
| ① س = ما 2س | ② س = س ما س |
| ③ س = س 2س  | ④ س = س 2س   |



$$\begin{array}{ll} \textcircled{5} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س}^2 & \textcircled{6} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س}^2 + \text{س}^3 \\ \textcircled{7} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س}^2 + \text{س}^3 + 10 & \textcircled{8} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س}^2 + \text{س}^3 + 5 \\ \textcircled{9} \text{ ص} = \frac{\text{طا} \text{ س}}{\text{س}} & \textcircled{10} \text{ ص} = \frac{\text{س}}{\text{ها} \text{ س}} \\ \textcircled{11} \text{ ص} = \frac{\text{س}^2 + \text{ها} \text{ س}}{\text{ها} \text{ س}} & \textcircled{12} \text{ ص} = \frac{\text{ها} \text{ س}}{1 + \text{ها} \text{ س}} \end{array}$$

٢ أوجد المشتقة الأولى للنوال الآتية:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \text{ ص} = \text{طا} \text{ س} (\text{ها} \text{ س}^2 + \text{ها} \text{ س}) & \textcircled{2} \text{ ص} = \text{قا} \text{ س}^2 - 1 \\ \textcircled{3} \text{ ص} = \text{س}^4 + \text{ها} \text{ س} + 5 & \textcircled{4} \text{ ص} = \text{س} \text{ ها} \text{ س} + \text{س}^3 \\ \textcircled{5} \text{ ص} = \text{طا} \text{ س}^3 & \textcircled{6} \text{ ص} = \text{ها} \text{ س}^2 + 5 \\ \textcircled{7} \text{ ص} = \text{ها} \left( \frac{1}{\text{س}} \right) & \textcircled{8} \text{ ص} = \text{ها}^2 (\text{س}^2 + 3) \\ \textcircled{9} \text{ ص} = \text{طا} \text{ س}^3 & \textcircled{10} \text{ ص} = 4 \text{ ها} \text{ س}^4 \\ \textcircled{11} \text{ ص} = \text{ها}^2 \left( \frac{\text{س}}{1 + \text{س}} \right) & \textcircled{12} \text{ ص} = \text{ها} (\text{ها} \text{ س}) \end{array}$$

٣ أوجد المشتقة الأولى لكل من النوال الآتية:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \text{ ص} = 12 + \text{ها} \text{ س}^2 & \textcircled{2} \text{ ص} = 2 \text{ س}^3 - \text{ها} \text{ س}^4 \\ \textcircled{3} \text{ ص} = 1 \text{ ها} \text{ س} + \text{ها} \text{ س}^3 & \textcircled{4} \text{ ص} = 12 \text{ ها} \text{ س} (5 \text{ س}) \end{array}$$

٤ أوجد المشتقة الأولى لكل من النوال الآتية:

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \text{ ص} = \text{ها} \text{ س} \text{ ها} \text{ س}^2 + \frac{\pi}{4} \text{ ها} \text{ س} + \frac{\pi}{4} & \textcircled{2} \text{ ص} = \text{ها} \text{ س} \text{ ها} \text{ س}^2 + \frac{\pi}{4} \text{ ها} \text{ س} + \frac{\pi}{4} \\ \textcircled{3} \text{ ص} = \frac{\text{طا} \text{ س} + \frac{\pi}{4}}{\text{طا} \text{ س}^2 - 1} & \textcircled{4} \text{ ص} = \frac{2 \text{ طا} \text{ س}}{\text{طا} \text{ س}^2 - 1} \end{array}$$



11 أوجد  $\frac{x}{y}$  من إذا كانت:

②  $x = y$

①  $x = y$

④  $x - y = x + y$

③  $x = y^2$

⑥  $x = y^2$

⑤  $x = y^2$

⑧  $x = y^3$

⑦  $x = y^2$

⑩  $x = y^2$

⑨  $x = y^2$

12 في المماس لكل من الصيغتين:

①  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]

②  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]

③  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]

④  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]

⑤  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]

⑥  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]

⑦  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]

⑧  $x = y$  عندما  $\frac{\pi}{y} = \frac{\pi}{y}$  يساوي

[ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ]



①  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عندما  $\theta = \frac{\pi}{4}$  يساوي .....  
 [ ٢ د ٢ - د ٢ د ٢ د ٢ ]  
 ②  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عندما  $\theta = \frac{\pi}{4}$  يساوي .....  
 [ ١ د ١ - د ١ د ١ د ١ د ١ ]

١١. قياس الزاوية التي يصنعها المماس لمنحنى كل من الدوال الآتية مع الإجهاد الموجب لمحور السينات عند النقطة المبيّنة:

①  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عند النقطة  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  يساوي .....  
 [ ٢٠ د ٤٥ د ٩٠ د ١٣٥ ]  
 ②  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عند النقطة  $(\pi, \pi)$  يساوي .....  
 [ ٣٠ د ٤٥ د ٩٠ د ١٣٥ ]  
 ③  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عند النقطة  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  يساوي .....  
 [ ٤٥ د ٩٠ د ١٣٥ د ١٨٠ ]  
 ④  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عند النقطة  $(1, \frac{\pi}{4})$  يساوي .....  
 [ ٤٥ د ٩٠ د ١٣٥ د ١٨٠ ]

١٢. ألب أن المماس للمنحنى  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عند  $\theta = \frac{\pi}{4}$  يصنع مع الإجهاد الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها  $\frac{\pi}{4}$

١٣. إذا كانت  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  فأوجد  $\frac{d\theta}{dx}$   
 ١٤. إذا كانت  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  فأوجد  $\frac{d\theta}{dx}$   
 ١٥. إذا كانت  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  فأوجد  $\frac{d\theta}{dx}$  عندما  $\theta = \frac{\pi}{4}$   
 ١٦. أوجد  $\frac{d\theta}{dx}$  إذا كانت  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  عندما  $\theta = \frac{\pi}{4}$   
 ١٧. إذا كانت  $\sin \theta = \sin \theta + \sin \theta$  فأوجد  $\frac{d\theta}{dx}$  عندما  $\theta = \frac{\pi}{4}$







$$\textcircled{3} \frac{2}{\text{وس}} (\text{ها}^2 \text{س}) = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{ها}^2 \text{س} \text{ في } \text{ها}^2 \text{س} \text{ في } \frac{1}{2} \text{ها}^2 \text{س} \text{ في } \frac{1}{2} \text{ها}^2 \text{س} ]$$

$$\textcircled{4} \frac{2}{\text{وس}} (\text{قا} \text{س}) = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{قا} \text{س} \text{ في } - \text{قا} \text{س} \text{ في } \text{قا} \text{س} \text{طا} \text{س} \text{ في } \frac{1}{2} \text{ها}^2 \text{س} ]$$

$$\textcircled{5} \text{ إذا كانت من } = \text{ها}^2 \text{س} - \text{ها}^2 \text{س} \text{ طا} \text{س} : \frac{2}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$$

$$[ - \text{ها}^2 \text{س} \text{ في } \text{ها}^2 \text{س} \text{ في } - \text{ها}^2 \text{س} \text{ في } - \text{ها}^2 \text{س} ]$$

$$\textcircled{6} \text{ إذا كانت من } = \text{قا} \text{س} (\text{ها} \text{س} + \text{ها} \text{س}) \text{ طا} \text{س} : \frac{2}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{طا}^2 \text{س} \text{ في } - \text{طا}^2 \text{س} \text{ في } 1 - \text{طا}^2 \text{س} \text{ في } \text{قا}^2 \text{س} ]$$

$$\textcircled{7} \text{ إذا كانت من } = (\text{قا} \text{س} - \text{طا} \text{س}) (\text{قا} \text{س} + \text{طا} \text{س}) \text{ طا} \text{س} : \frac{2}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{صغر في } 1 \text{ في } 1 - \text{طا}^2 \text{س} ]$$

$$\textcircled{8} \text{ إذا كانت من } = \frac{\text{ها} \text{س} + \text{ها} \text{س} \text{ طا} \text{س}}{\text{ها} \text{س}} : \frac{2}{\text{وس}} = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{قا}^2 \text{س} \text{ في } \text{قا}^2 \text{س} \text{ في } \text{طا}^2 \text{س} \text{ في } \text{طا}^2 \text{س} ]$$

### مسائل تقيس مستويات عب في التفكير

$$\textcircled{18} \text{ أوجد } \frac{2}{\text{وس}} \text{ إذا كانت د (س)} = \frac{2 + \text{ها}^2 \text{س}}{2 - \text{ها}^2 \text{س}}$$

$$\textcircled{19} \text{ إذا كانت من } = 2 + 2 + 2 = 2 + \text{ها} \text{س} \text{ أوجد } \frac{2}{\text{وس}}$$

$$\textcircled{20} \text{ إذا كانت من } = \frac{\text{ها} \text{س} - \text{ها} \text{س}}{\text{ها} \text{س} + \text{ها} \text{س}} \text{ فاثبت أن } (1 + \text{ها}^2 \text{س}) \frac{2}{\text{وس}} = 2$$

$$\textcircled{21} \text{ إذا كانت } \left( 3, \frac{\pi}{4} \right) \text{ تقع على منحني الدالة من } = | \text{ها} \text{س} \text{ طا} \text{س} + \text{ها} \text{س} \text{ طا} \text{س} |$$

المماس له عند هذه النقطة هي 2 من 4 + 3 = 7 ، فأوجد قيمتي 1 و 2

$$\textcircled{22} \text{ إذا كان من } = \text{ها} \text{س} - \frac{1}{2} \text{ها}^2 \text{س} \text{ اثبت أن } \frac{2}{\text{وس}} = \text{ها}^2 \text{س}$$



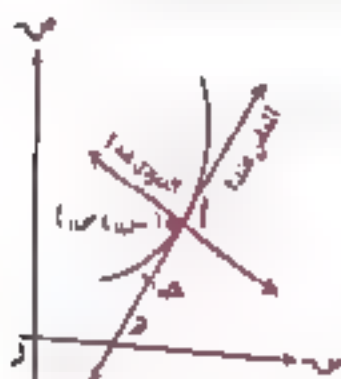
## تطبيقات على المشتقات

الدرس

٦

تتطلب التطبيقات الهندسية على مشتقة الدالة إيجاد معادلة الخط المستقيم إذا علم ميله ونقطة تقع عليه لذلك يجب أن نتذكر العلاقة بين ميلين المستقيمين المتوازيين والمستقيمين المتعامدين.

مثال ١: إيجاد ميل المماس للمنحنى عند أي نقطة (س، ع) الواقعة عليه هو المشتقة الأولى لدالة هذا



التحني حيث  $س = د$  (س)

أي أن

ميل المماس للمنحنى  $س = د$  (س) عند النقطة

$(س, ع)$  الواقعة عليه  $= \left[ \frac{د}{دس} \right] (س, ع)$

ويكون  $طا = \left[ \frac{د}{دس} \right] (س, ع)$

حيث  $د$  قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور الصادات.





### ملاحظات عامة

إذا كان  $\ell_1$  ،  $\ell_2$  ميلين مستقيمين معلومين  $\ell_1$  ،  $\ell_2$  فإن ،  
 $\ell_1 \parallel \ell_2$  إذا فقط إذا كان  $m_1 = m_2$  (شرط التوازي)  
 $\ell_1 \perp \ell_2$  إذا فقط إذا كان  $m_1 m_2 = -1$  (شرط التعامد)

ونستنتج من ذلك أن

$$\text{ميل العمودي على المنحنى } m = -d(s) \text{ عند النقطة الواقعة عليه } = \frac{1}{\left[ \frac{ds}{ds} \right] (s_1, s_2)}$$

### معادلة المماس والعمودي على منحنى

إذا كانت  $(s_1, s_2)$  نقطة تقع على منحنى الدالة  $d$  حيث  $s = d(s)$  ،  $m$  ميل  
 المماس عند هذه النقطة فإن :

① معادلة المماس للمنحنى عند النقطة  $(s_1, s_2)$

$$\text{هي : } m - m_1 = m_2 (s - s_1)$$

② معادلة العمودي على المنحنى عند النقطة  $(s_1, s_2)$

$$\text{هي } m - m_1 = \frac{1}{m_2} (s - s_1)$$

### تلميح هام

إذا كان المماس يصنع زاوية موجبة قياسها  $\theta$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات  
 فإن ميل المماس =  $\tan \theta$

③ إذا كان المماس يوازي المستقيم  $q$   $s + b$   $m + d = 0$   
 فإن ميل المماس = ميل المستقيم المعطى =  $\frac{-\text{معامل } s}{\text{معامل } m}$  أي أن  $\frac{1}{m} = \frac{b}{d}$

أما إذا كان المماس عمودي على هذه المستقيم فإن ميل المماس =  $\frac{\text{معامل } m}{\text{معامل } s} = \frac{b}{d}$   
 ④ إذا كان المماس يوازي محور السينات فإن ميل المماس = صفر  
 ⑤ إذا كان المماس يوازي محور الصادات فإن ميل المماس غير معرف أي أن مقام ميل  
 المماس = صفر



١. المستقيم الذي يمر بالنقطتين  $(س١, ٤)$  و  $(س٢, ٤)$  ميله  $= \frac{٤ - ٤}{س٢ - س١} = ٠$   
 ٢. إذا كان ميل المماس موجباً فإن المماس يصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.  
 ٣. إذا كان ميل المماس سالباً فإنه يصنع زاوية منفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.  
 ٤. لتحديد نقطة تقاطع منحنى مع محور السينات نضع  $س = ٠$ ، ونوجد قيم  $س$  ولتحديد نقطة تقاطع منحنى مع محور الصادات نضع  $س = ٠$ ، ونوجد قيم  $س$  لتحديد نقطة تقاطع منحنى مع مستقيمين لحل معادلتهم جبرياً (معادلتين أليتين).

### مثال ٦

أوجد النقطة التي تقع على المنحنى  $س = ٣ - ٤س + ٢$  والتي عندها ميل المماس للمنحنى يساوي  $١$ .

### الحل

$$\begin{aligned} \therefore س = ٣ - ٤س + ٢ & \quad \therefore \frac{٤}{س} = \frac{٤}{س} \\ \therefore س = ٣ - ٤س + ٢ & \quad \therefore ٣ - ٤س + ٢ = ١ \\ \therefore س = ٣ - ٤س + ٢ & \quad \therefore ٣ - ٤س + ٢ = ١ \\ \therefore س = ٣ - ٤س + ٢ & \quad \therefore ٣ - ٤س + ٢ = ١ \\ \therefore س = ٣ - ٤س + ٢ & \quad \therefore ٣ - ٤س + ٢ = ١ \\ \therefore س = ٣ - ٤س + ٢ & \quad \therefore ٣ - ٤س + ٢ = ١ \end{aligned}$$

$\therefore$  النقطة هي  $(١, ٥)$  و  $(١, ١)$

### مثال ٧

أوجد النقطة الواقعة على منحنى الدالة  $س = ٣ - ٢س + ٩$  والتي يكون لها عندها موزناً لمحور السينات.

### الحل

$$\begin{aligned} \therefore س = ٣ - ٢س + ٩ & \quad \therefore \frac{٤}{س} = \frac{٤}{س} \\ \therefore س = ٣ - ٢س + ٩ & \quad \therefore ٣ - ٢س + ٩ = ١ \\ \therefore س = ٣ - ٢س + ٩ & \quad \therefore ٣ - ٢س + ٩ = ١ \end{aligned}$$



$$\therefore \text{من } 2 - 1 = 1 \text{ من } 3 = 1$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = 1 \text{ من } 3 = 1$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = 1 \text{ من } 3 = 1$$

$$\therefore (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

(وبالتعويض في معادلات الملاحظين)

$$\text{عندما } 1 =$$

$$\text{عندما } 3 =$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = 1 \text{ من } 3 = 1$$

$$\therefore \text{من } 1 - 2 = 1 \text{ من } 3 = 1$$

$$\therefore \text{النقطة هي } (1, 0) \text{ و } (3, 27)$$

## مثال ٢

أوجد البعد الواقع على منحنى الدالة  $z = 3 + 2x - 1$  والتي يكون عندها المماس:

$$1 \text{ موازيًا للمستقيم } y = 7 - x$$

$$2 \text{ عموديًا على المستقيم } z = 3 + x$$

## الحل

$$\text{من } z = 3 + 2x - 1 \text{ من } 1 = \frac{2}{1} \text{ من } 3 = \frac{2}{1}$$

$$1 \therefore \text{المماس موازيًا للمستقيم } y = 7 - x$$

.. ميل المماس = ميل المستقيم

$$\therefore \text{ميل المستقيم} = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\therefore \text{من } 3 = 2$$

$$\therefore \text{من } 1 = 2$$

$$\therefore \text{من } 1 = 2 + 1 = 3$$

$$\therefore \text{من } 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\therefore \text{من } 3 = 2 + 1 = 3$$

$$\therefore \text{من } 1 = 2$$

$$\text{عندما } 1 =$$

$$\text{عندما } 1 =$$

$$\therefore \text{النقطة هي } (1, 0) \text{ و } (3, 27)$$

$$2 \therefore \text{المماس عموديًا على المستقيم } z = 3 + x \text{ من } 1 = \text{ميل المستقيم} = \frac{1}{1}$$

$$\therefore \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$\therefore \text{من } 3 = 2$$

$$\therefore \text{ميل العمود} = 3$$

$$\therefore \text{من } 3 = 2 + 1 = 3$$



ندرس الدالة الخطية على المنحنيات

∴ س = ٠ ، (بالنعويض في معادلة المنحنى)  
 ∴ ص = ١ - ٠ + ٠ = ١

∴ س = ٢  
 عندما س = ٠

∴ النقطة هي (١، ١)

### مثال

أوجد النقطة الواقعة على المنحنى  $\frac{2-s}{1-s}$  والتي عندها المماس للمنحنى موازياً للمستقيم  $s = 4 + s$

### الحل

$$\frac{2-s}{1-s} = \frac{4+s}{1-s}$$

$$\frac{2-s}{1-s} = \frac{4+s}{1-s}$$

المماس يوازي المستقيم  $s = 4 + s$   
 ∴ ميل المماس للمنحنى = ميل المستقيم - معامل س بعد ترتيب المعادلة

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{1-s} \\ 1 &= \frac{1}{1-s} \\ 1 &= 1-s \\ 0 &= -s \\ s &= 0 \end{aligned}$$

∴ النقطة هي (٢، ٠) ، (٠، ٢)

### مثال

أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى  $\frac{3+s}{1+s}$  عند النقطة الواقعة على المنحنى والتي إحداثيها السيني = ١ ، هل النقطة (٤، ٣) تقع على المماس؟

### الحل

$$\frac{3+s}{1+s} = \frac{3+1}{1+1} = 2$$

∴ النقطة (٢، ١) تقع على المنحنى



$$\frac{3 - س - 1 + س}{2(1 + س)} = \frac{1 \times (3 + س) - 1 \times (1 + س)}{2(1 + س)} = \frac{1 - س}{2(1 + س)}$$

$$\frac{2 - س}{2(1 + س)} = \frac{1 - س}{2(1 + س)}$$

(ميل المماس)

$$2 = \frac{1 - س}{2} = \frac{2 - س}{2(1 + س)} = (2, 1) \left[ \frac{1 - س}{2} \right] \therefore$$

$$(س - س_1) = (س_2 - س_1) \cdot 2$$

معادلة المماس هي

$$(س - 1) = (2 - س) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 - س = 1 - س$$

$$\boxed{1 = 2 - س}$$

$$(س - س_1) = (س_2 - س_1) \cdot \frac{1}{2}$$

معادلة العمودي هي

$$(س - 1) = (2 - س) \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 - س = 2 - س$$

$$\therefore 2 - س = 2 - س$$

$$\boxed{1 = 2 - س}$$

بالتعويض بالنقطة  $(-3, 4)$  في معادلة المماس

$\therefore$  النقطة  $(-3, 4)$  تنتمي لمعادلة المماس

$$\therefore 4 = 2 + (-3) = -1$$

مثال

أوجد معادلتى المماس والعمودي للمنحنى  $س = 2$  من عند النقطة  $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

الحل

$$\therefore \frac{دس}{دس} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\therefore س = 2$$

$$\frac{دس}{دس} = 2 - س = 2 - 2 = 0$$

$$1 = \left( \frac{\pi}{4} \right) \times 2 + \left( \frac{\pi}{4} \times 2 \right) = \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) \left[ \frac{دس}{دس} \right]$$

ميل المماس  $(2)$

$$(س - س_1) = (س_2 - س_1) \cdot 2$$

معادلة المماس هي



$$\therefore s = s$$

$$s - \frac{\pi}{4} = \left( \frac{\pi}{4} - s \right)$$

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s} = \left( \frac{1}{s} - s \right) \quad \text{معادلة العمودي هي}$$

$$\frac{\pi}{4} = s + s$$

$$s - \frac{\pi}{4} = \left( \frac{\pi}{4} - s \right)$$

مثال

أوجد قيمة  $s$  التي تجعل المساحة المنحنية بين المنحنيين  $s = 1 + s + s^2$  عند النقطة  $(3, 1)$  الواقعة عليه يساوي 5

الحل

النقطة  $(3, 1)$  تقع على المنحني  $s = 1 + s + s^2$

$$1 = 1 + 3 + 9$$

$$3 = 1 + 3 + 9$$

ميل المنحني عند أي نقطة عليه  $\frac{ds}{ds} = \frac{1}{1 + 2s}$

$$3 = 1$$

$$5 = 1 + 3 + 9$$

$$\therefore \left[ \frac{ds}{ds} \right]_{(3, 1)} = 5$$

$$1 = s$$

$$3 = 1 + 3 + 9$$

بالتعويض في المعادلة (3) عن قيمة  $s$

مثال

أثبت أن مساحة المنحني المحصور بين المنحنيين  $s = \frac{1}{s}$  (حيث  $s < 0$ ) عند أي نقطة عليه ومحور السينات ومحور الصادات تساوي 2 وحدة مربعة

الحل

$$\therefore s = \frac{1}{s} = s$$

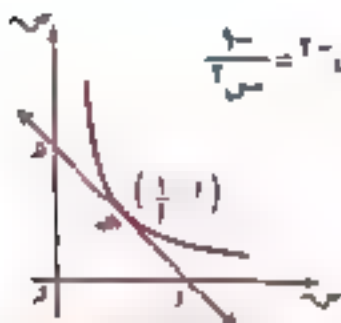
نفرض أن  $s = 1$

النقطة هي  $\left( \frac{1}{s}, 1 \right)$  على المنحني

$$\left[ \frac{ds}{ds} \right]_{\left( \frac{1}{s}, 1 \right)} = \frac{1}{s}$$

$$\frac{1}{s} = 1 - s = \frac{1}{s}$$

$$\therefore \frac{1}{s} = s$$





معادلة المماس عند  $\theta$  هي:  $(\cos \theta - \sin \theta) x + (\sin \theta + \cos \theta) y = 2$

$$\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta - \sin \theta)$$

$$1 = \cos \theta - \sin \theta \Rightarrow \cos \theta = 1 + \sin \theta$$

(معادلة المماس عند  $\theta$ )

$$1 = \cos \theta + \sin \theta \Rightarrow \cos \theta = 1 - \sin \theta$$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس  $\theta$  مع محور الصادات نضع  $\sin \theta = 0$

$$\therefore \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$$

نقطة التقاطع مع محور الصادات هي  $(0, 2)$

$$\sin \theta = 0$$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس  $\theta$  مع محور السينات نضع  $\cos \theta = 0$

$$\sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

نقطة التقاطع مع محور السينات هي  $(2, 0)$

$$\sin \theta = 0$$

مساحة  $\Delta$  المطلوب  $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$  وحدة مربعة

## مثال

أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمماس عند النقطة  $(-1, 2)$

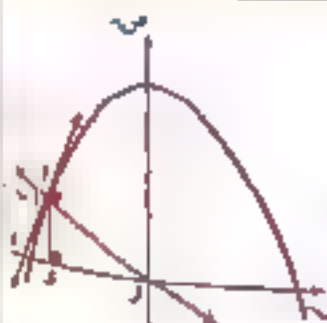
## الحل

$$\sin \theta = 2, \cos \theta = -1$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{2}{-1} \Rightarrow \tan \theta = -2$$

$$\text{ميل المماس} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

معادلة المماس عند النقطة  $(-1, 2)$  هي  $(\cos \theta - \sin \theta) x + (\sin \theta + \cos \theta) y = 2$





$$2 \text{ ص} - 4 = 1 + 2 \text{ ص} \quad \therefore 2 \text{ ص} - 2 = 5 + 2 \text{ ص} \quad \therefore 0 = 5 + 2 \text{ ص}$$

لايجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع  $ص = 0$

$$2 \text{ ص} - 4 = 1 + 2 \text{ ص} \quad \therefore 0 = 5 + 2 \text{ ص}$$

معادلة العمودي عند النقطة  $(-1, 5)$  هي:

$$(2 \text{ ص} - 4) = (1 + 2 \text{ ص})$$

$$2 \text{ ص} - 4 = 1 + 2 \text{ ص} \quad \therefore 2 \text{ ص} - 2 = 5 + 2 \text{ ص}$$

لايجاد نقطة تقاطع العمودي مع محور السينات نضع  $ص = 0$

$$2 \text{ ص} - 4 = 1 + 2 \text{ ص} \quad \therefore 0 = 5 + 2 \text{ ص}$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ المطلوب} = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5 \text{ وحدات مربعة}$$

مثال

إذا كان المماس للمنتحن  $ص = 2 - 4 \text{ ص}^2$  عند النقطة  $(-1, 5)$  يعبر  
المنتحن عند نقطة أخرى  $ب$  فأوجد معادلة المماس عند  $ب$

الحل

$$\therefore 2 \text{ ص} - 4 = 1 + 2 \text{ ص} \quad \therefore \frac{2 \text{ ص}}{2} = \frac{5 + 2 \text{ ص}}{2}$$

$$\text{ميل المماس} = \left[ \frac{2 \text{ ص}}{2} \right]_{(-1, 5)} = 2 - 4(-1) = 6$$

معادلة المماس للمنتحن عند النقطة  $(-1, 5)$  هي:

$$\frac{2 \text{ ص} - 4}{1 + 2 \text{ ص}} = 6 \quad \Rightarrow 2 \text{ ص} - 4 = 6 + 12 \text{ ص}$$

لايجاد نقطة تقاطع المماس مع المنتحن:

$$2 \text{ ص} - 4 = 6 + 12 \text{ ص} \quad \Rightarrow 2 \text{ ص} - 10 = 12 \text{ ص}$$

$$2 \text{ ص} - 4 = 6 + 12 \text{ ص} \quad \Rightarrow 2 \text{ ص} - 10 = 12 \text{ ص}$$

$$2 \text{ ص} - 4 = 6 + 12 \text{ ص} \quad \Rightarrow 2 \text{ ص} - 10 = 12 \text{ ص}$$

$$\therefore 2 \text{ ص} - 4 = 6 + 12 \text{ ص} \quad \Rightarrow 2 \text{ ص} - 10 = 12 \text{ ص}$$



$$\begin{aligned}
 & \text{س } 1 = 1 \\
 & \text{عندما س } 1 = 1 \\
 & \text{عندما س } 1 = 1 \\
 & \therefore \frac{1}{1} = 1 \\
 & \text{مبين لماس } = \frac{1}{1} = 1 \\
 & \text{معادلة العمودي عند النقطة (1, 1) هي:} \\
 & (1 - 1) = (1 - 1) \\
 & \text{س } 1 = 1 \\
 & \text{س } 1 = 1 \\
 & \text{س } 1 = 1
 \end{aligned}$$







مسائل المستوى الأول

١. اختر الإجابة الصحيحة من بين بدائل المعطاة .

١. ميل المماس لمنحنى الدالة  $d$  حيث  $s = d(s)$  عند أي نقطة عليه هو .....

[  $\frac{ds}{ds}$     $\frac{ds}{ds}$     $\frac{ds}{ds}$     $\frac{ds}{ds}$  ]

٢. ميل المماس للمنحنى  $s = (2 - s)^2$  عندما  $s = 1$  هو .....

[  $0$     $1$     $2$     $3$  ]

٣. ميل المماس للمنحنى  $s = \frac{5}{1-s}$  عندما  $s = 0$  هو .....

[  $1$     $2$     $3$     $4$  ]

٤. ميل المماس للمنحنى  $s = \frac{\pi}{4}$  عندما  $s = \frac{\pi}{4}$  يساوي .....

[  $\frac{1}{4}$     $\frac{1}{2}$     $\frac{3}{4}$     $1$  ]

٥. ميل العمودي للمنحنى  $s = 2 - s$  عندما  $s = \frac{\pi}{4}$  يساوي .....

[  $\frac{1}{4}$     $\frac{1}{2}$     $\frac{3}{4}$     $1$  ]

٦. ميل العمودي للمنحنى  $s = 2 - s$  عند النقطة التي تقع على المنحني

وإحداثياتها السينية  $\frac{\pi}{4}$  يساوي .....

[  $1$     $2$     $3$     $4$  ]

٧. إذا كان المستقيم  $s = 2 - s$  مماساً لمنحنى الدالة  $d$  عند النقطة التي

إحداثياتها السينية  $2$  فإن  $d'(2) = \dots\dots\dots$

[  $\frac{1}{4}$     $\frac{1}{2}$     $\frac{3}{4}$     $1$  ]

٨. إذا كان المستقيم  $s = 3 - s$  مماساً لمنحنى الدالة  $d$  عند النقطة  $(2, 1)$  فإن  $d'(3) = \dots\dots\dots$

[  $1$     $2$     $3$     $4$  ]

٩. إذا كان المستقيم  $s = -s + 7$  مماساً على منحنى الدالة  $d$  عند النقطة  $(-2, 1)$  فإن  $d'(-2) = \dots\dots\dots$

[  $\frac{1}{4}$     $\frac{1}{2}$     $\frac{3}{4}$     $1$  ]

١٠. المماس للمنحنى  $s = (3 - s)^2$  عند النقطة  $(2, 1)$  يصنع مع الإصبع

الموجب محور السينات زاوية موجبة ظلها  $\dots\dots\dots$

[  $1$     $2$     $3$     $4$  ]



١١) المماس للمنحنى  $(س + ص) = ٧$  عند النقطة  $(١٤, ٠)$  يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها = .....

[١٥° د ١٣٥° د ٩٠° د ١٥٠° د]

١٢) ميل المماس للمنحنى  $س - ص = ٣$  عند  $س = ٣$  هو .....

[٦ د ٩ د ٣ د ٣- د]

١٣) ميل العمودي للمنحنى  $س = ص$  عند  $س = ٢$  هو .....

[١ د ١- د ١/٢ د ١- د]

١٤) معادلة المماس للمنحنى  $س = (س - ١)^٢$  عند النقطة  $(١٤, ٧)$  هي .....

[ $س = ١ - س - ٣$  د  $س = س - ٢$  د  $س = ٣ - س$  د  $س = ٢ - س$ ]

### ثانياً مسائل المستوى الثاني

٣١) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى  $س = ٢ + \frac{١}{س} - ١$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند  $س = ١$  [٢٥°]

٣٢) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى  $س = \frac{س + ٣}{س - ٢}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة  $(٣, ٤)$  [١٥°، ٩٠°، ١٣٥°]

٣٣) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى  $س = س(س - ١)(س + ١)$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند نقطة الأصل. [١٣٥°]

٣٤) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها العمودي على المنحنى  $س = ٢ + ٧$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة  $(٣, ٥)$  لأقرب دقيقة. [١٨°، ٣٢°]

٣٥) أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المماس للمنحنى  $س = ٢$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات عند النقطة  $(\pi, ٤)$  [١٣°، ٩١°]

٣٦) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة  $س = ٣ + س - ١$  والتي يكون عندها ميل المماس للمنحنى يساوي ٦ [١(٣٤١) و ١(٥٠-٤٦)]

٣٧) أوجد النقط الواقعة على المنحنى  $س = ٣ - ٦ - ٢$  و  $س = ١٥ + ٢$  والتي يكون عندها المماس موازياً لمحور السينات. [١(٨٠-٤٥) و ١(٢٨١-٦)]



١٣) أوجد النقط الواقعة على المنحنى  $s = 2 - t$  من  $t = 3$  والتي يكون عندها المماس للمنحنى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها  $135^\circ$  [13, 14, 15, 16, 17]

١٤) أوجد النقط الواقعة على المنحنى  $s = 3 - t^2$  من  $t = 11$  والتي يكون عندها المماس:

- ① موازيًا للمستقيم  $s = 5 - t$
- ② عموديًا على المستقيم  $s = 6 + t$
- ③ يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ظلها  $11$

١٥) أوجد النقط الواقعة على منحنى لدالة  $s = (3 - t)^2$  والتي يكون عندها المماس يوازي المستقيم  $s = 3 - t$

١٦) أوجد النقط الواقعة على المنحنى  $s = \frac{2 - t}{1 - t}$  والتي يكون عندها المماس للمنحنى موازيًا للمستقيم  $s = 1 + t$

١٧) أوجد النقط الواقعة على منحنى لدالة  $s = \frac{2 - t}{1 - t}$  والتي يكون عندها المماس عموديًا على المستقيم  $s = 7 + t$

١٨) إذا كان  $s \in [0, \frac{\pi}{4}]$  فأوجد النقط الواقعة على المنحنى  $s = 2 - t$  ويكون المماس عنده يوازي المستقيم  $s = 0 + t$

١٩) أوجد النقط الواقعة على منحنى الدالة  $s = 3 + t$  والتي يكون عندها المماس موازيًا لمحور السينات حيث  $s \in [\frac{\pi}{4}, 0]$

٢٠) أوجد معادلة المماس للمنحنى في كل مما يأتي عند النقط المعطاة:

①  $s = 2 - t^2$  من  $t = 3$  عند النقط التي إحداثياتها السينية  $t = 3$

②  $s = \frac{1}{t} + t$  عند النقط  $(2, \frac{5}{2})$

③  $s = \sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}$  عند النقط  $(4, 4)$

④  $s = (t^2 + 5)(t + 3)$  عند النقط  $(-2, -6)$

⑤  $s = \frac{3 + t}{1 + t}$  عند النقط  $(1, 2)$

⑥  $s = (3 - t^2)^2$  عند النقط  $(2, 1)$



$$\frac{x+1}{x-1} = 2 \quad \text{--- (9)}$$

❏ يوجد معادلة لعمودي على المنحني في كل مما يأتي عند النقط المعطاة.

(۷) مس = ۲ جا مس + ۱ جا مس

أوجد معادلة المماس لمتحنى الدالة  $y = (x - 2)(x + 4)$  عند نقطتي تقاطعه

مع ظهور السينات.

٢٤) اوجد معادلة المماس للمعنى الذي معادلته  $x - y = 1$  عند نقطة تقاطعه مع

## المستقيم في ٢٢ سن

أوجد معادلة العمودي على المماس  $= (x - 6) + (y - 3) = 0$  عند نقطة تقاطعه مع المستقيم

مسلم

٣٧ ﴿٣٧﴾ الَّذِينَ آمَنُوا بِالْغَيْبِ الْمَرْمُومِ لَمْ يَكُنْ لَهُمْ مِنَ اللَّهِ عَاقِبَةٌ إِنَّ الْغُيُوبَ لَافْتَحَتْ ﴿٣٨﴾

صموداً على الماس المرسوم للمفحص من ٢ - ٣ عند نفس النقطة.

نلاحظ أن المعادلات الخمس التالية هي:  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$  عند أي نقطة عليه تعميل جزئية واحدة

على محور السينات ثم أوجد معادلتى المماس والعمودى للمماس عند النقطة  $S = -1$



٢٤ أثبت أن المماس للمنحنى  $\frac{y+1}{x-1} = 1$  عند أي نقطة على المنحنى يصنع الزاوية متفرجة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٢٥ أوجد معادلة المماس والعمودي لنحنى الدالة  $y = 2x + 3$  عند  $x = 1$  عند تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

٢٦ إذا كان المنحنى  $y = 3x^2 - 7x + 4$  يقطع محور السينات في النقطتين  $A$  و  $B$  أثبت أن المماسين عند  $A$  و  $B$  متعامدين.

٢٧ أوجد النقط الواقعة على المنحنى  $y = x^2$  والتي يمر المماس للمنحنى عندها بالنقطة  $(1, 4)$

٢٨ أوجد مساحة سطح المثلث المكون من محور السينات والمماس والعمودي عليه للمنحنى  $y = x^2 - 6x + 13$  عند النقطة  $(5, 4)$  الواقعة عليه

٢٩ إذا كان منحنى الدالة  $y = (3-x)^2 + 3$  أوجد

- ١ معادلة المماس عند نقطة تقاطعه مع المحور الصادي.
- ٢ إحداثيي نقطة تقاطع هذا المماس مع المحور السيني.
- ٣ مساحة المثلث المحدد بهذا المماس ومحوري الإحداثيات.

٣٠ إذا كان المماس للمنحنى  $y = \frac{4}{x}$  عند النقطة  $H$  في الربع الأول يقطع محوري الإحداثيات في النقطتين  $M$  و  $N$  فأثبت أن مساحة  $\triangle OMN$  و  $H$  ثابتة ولا تعتمد على موضع النقطة  $H$  الواقعة على منحنى الدالة.

٣١ إذا كان ميل المماس للمنحنى  $y = \frac{4}{x+1}$  يساوي  $-8$  عند النقطة  $(-1, -4)$  أوجد قيمتي  $A$  و  $B$

٣٢ إذا كان المنحنى  $y = x^2 + 3x + 8$  يمس المستقيم  $y = 8x + 5$  عند النقطة  $(-1, 3)$  فأوجد قيمتي  $A$  و  $B$

٣٣ إذا كان المنحنى  $y = (x^2 - 2x)(x + 1)$  يمس محور السينات عند النقطة  $(1, 0)$  ويمس المستقيم  $y = 2x$  عند نقطة الأصل فأوجد قيمتي  $A$  و  $B$



٣٤١) إذا كان المماس لمنحنى الدالة  $d$  حيث  $d = f(s) = s^2 + s + 5$  عند النقطة  $(-3, 1)$  الواقعة عليه يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها  $45^\circ$  فأوجد قيمتي  $f$  و  $f'$

[٣٤١]

### مسائل تقىس مستويات علمها في التفكر

٣٤٢) إذا كانت الدالة  $d$  حيث  $d = f(s) = s^2 + s + 1$  عندما  $s > 1$  عندما  $s \leq 1$

قابلة للإشتقاق عند  $s = 1$  أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند هذه النقطة  $[s = 1]$

٣٤٣) عى قيمة  $f \geq 1$  التى تجعل محور السينات مماساً للمنحنى:

$f(s) = s^2 - s + 1$  ثم عى نقطة التماس. [٣٤٣]

٣٤٤) أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة  $d$  حيث  $d = f(s) = \frac{s^2}{|s|}$  عند  $s = 2$   $[s = 1 - s = -1]$

٣٤٥) أثبت أن المماس لمنحنى الدالة  $f(s) = |s| - 3$  عند النقطة  $s = 2$

يوازي العمودى على منحنى الدالة عند نقطة  $s = -1$

٣٤٦) أثبت أن معادلة المماس للمنحنى  $f(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2}$  عند النقطة  $(s, f(s))$

الواقعة عليه هي  $f(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2}$

٣٤٧) أوجد معادلة العمودى للمنحنى  $f(s) = s^2 - 3s + 5$  عند كل من نقطتى تقاطع مع الدائرة  $s^2 + s + 2 = 0$

$[s = 2 + s = -1 \text{ و } s = 1 + s = -2]$

٣٤٨) أوجد قيمة  $f$  التى تجعل المستقيم  $f = 4s + 1$  مماساً للمنحنى  $f(s) = s^2 + 5$

٣٤٩) أوجد معادلة المماس للمنحنى:

$f(s) = s^2 + 2s - 1$  عند النقطة  $(-1, 0)$

٣٥٠) إذا كانت  $(3, \frac{\pi}{4})$  تقع على منحنى الدالة  $f(s) = s^2 + s + 1$

وكانت معادلة المماس له عند هذه النقطة هي  $f(s) = s^2 + 3s + 1$

فأوجد قيمتي  $f$  و  $f'$

[٣٥٠]





## التكامل

## الآن لنرى

٧

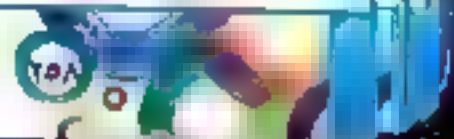
علما قديم سبق كيفية إيجاد المشتقة وإذا علمت الدالة وحيث  $D'(x) = \frac{f}{x}$  و  $D(x)$  وسوف نتناول في هذا الدرس العملية لعكسية لعملية الاشتقاق وهي المشتقة العكسية.

### ٣) تعريف المشتقة العكسية

إذا كانت الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي  $\frac{f}{x}$  فإن العملية العكسية لها وهي إيجاد  $f$  إذا علم  $\frac{f}{x}$  تسمى بالمتكاملة العكسية أو دالة التكامل،

فمثلا إذا كانت  $f = x^2$  فإن  $\frac{f}{x} = 2x$  وإذا كانت  $\frac{f}{x} = 2x$  فإن  $f = x^2$

فإن المشتقة العكسية هي:  $x^2$  أو  $x^3$  أو  $x^4$  أو  $x^5$  أو  $x^6$  أو  $x^7$  أو  $x^8$  أو  $x^9$  أو  $x^{10}$  لأن جميع هذه الدوال مجموعة المتكاملات العكسية بدالة، تكون مشتقتها  $f = x^2$  فمثلا فإذا مررنا للدالة الموجودة بعد  $x^2$  بالرمز  $\int$  نعدل على هذا العدد الثابت فإن  $f = x^2$  تكون مشتقتها  $\frac{f}{x} = 2x$





... أن نحصل للمعروف التالي :

يقال أن الدالة  $f$  مشتقة عكسية للدالة  $g$  (إذا كانت  $f'(x) = g(x)$ ) لكل  $x$  في مجال  $D$ .

مجموعة المشتقات العكسية للدالة  $f$  تسمى لتكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز  $\int f(x) dx$  ويفرأ تكامل  $f$  نسبة إلى  $x$ .

إذا كانت  $f'(x) = g(x)$  فإن  $\int g(x) dx = f(x) + C$  حيث  $C$  ثابت اختياري (ثابت التكامل).

فمثلاً

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 5) = 2x \Rightarrow \int 2x dx = x^2 + 5 + C$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 5) = 3x^2 \Rightarrow \int 3x^2 dx = x^3 - 5 + C$$

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 2) = 4x^3 \Rightarrow \int 4x^3 dx = x^4 - 2 + C$$

ولتعيين قيمة الثابت  $C$  يلزم معرفة قيمة التكامل عند قيمة معينة للمتغير المستقل  $x$  وهذا خارج نطاق دراستك.

مثال

أثبت أن الدالة  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  هي مشتقة عكسية للدالة  $g(x) = 3x^{-4}$  حيث  $g'(x) = -12x^{-5}$ .

الحل

نوجد مشتقة الدالة  $f(x) = \frac{1}{x^3}$   $f'(x) = -\frac{3}{x^4} = -3x^{-4}$

أي أن الدالة  $f(x) = \frac{1}{x^3}$  هي مشتقة عكسية للدالة  $g(x) = 3x^{-4}$ .



$$\left[ \text{س}^5 \text{ و س} = \frac{\text{س}^{1+5}}{1+5} + \text{ث حيث ث ثابت} \right] \text{ عدد نسبي } \text{س} \neq 0$$

أي إذا نصيف للأش واحد ثم نقسم على الأس الجديد + ث

$$\text{فمثلاً } \left[ \text{س}^6 \text{ و س} = \frac{\text{س}^{1+6}}{1+6} + \text{ث} = \frac{1}{7} \text{ س}^7 + \text{ث} \right]$$

$$\text{وأيضاً } \left[ \text{س}^{-2} \text{ و س} = \frac{\text{س}^{1+(-2)}}{1+(-2)} + \text{ث} = \frac{1}{-1} \text{ س}^{-1} + \text{ث} \right]$$

$\left[ \text{ا و س} = \text{س} + \text{ث حيث ا عدد حقيقي ثابت} \right]$

$$\text{فمثلاً } \left[ \text{س}^0 \text{ و س} = \text{س} + \text{ث} \right] \text{ ، } \left[ \text{س}^{-3} \text{ و س} = \text{س}^{-3} + \text{ث} \right]$$

## مثال ٢

تحقق من صحة كل مما يأتي :

$$\left[ \text{س}^6 \text{ و س} = \frac{1}{6} \text{ س}^7 + \text{ث} \right] \quad \left[ \text{س}^2 \text{ و س} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 5} + \text{ث} \right] \quad \left[ \text{س}^2 \text{ و س} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 5} + \text{ث} \right]$$

## الحل

$$\textcircled{1} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^6} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{\text{س}^6} + \text{ث} \right) \Rightarrow \frac{1}{\text{س}^5} = \frac{1}{6} + \text{ث} \Rightarrow \text{س}^5 = \frac{6}{1 + 6\text{ث}}$$

$$\therefore \left[ \text{س}^6 \text{ و س} = \frac{1}{6} \text{ س}^7 + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 5} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\text{س}^2 + 5} + \text{ث} \right) \Rightarrow \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 5} = \frac{1}{2} + \frac{\text{ث}}{2}$$

$$\therefore \left[ \text{س}^2 \text{ و س} = \frac{\text{س}}{\text{س}^2 + 5} + \text{ث} \right]$$





## مثال

- أوجد : ١)  $\int \sin^4 x \, dx$  ٢)  $\int \sin^6 x \, dx$   
 ٣)  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$  ٤)  $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$

## الحل

- ١)  $\int \sin^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \cos^2 x) \, dx$   
 $= \int \sin^2 x \, dx - \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$   
 ٢)  $\int \sin^6 x \, dx = \int \sin^4 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \sin^4 x (1 - \cos^2 x) \, dx$   
 $= \int \sin^4 x \, dx - \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$   
 ٣)  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \sin^2 x \, dx - \int \sin^4 x \, dx$   
 ٤)  $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx$   
 $= \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx - \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$

## خواص التكامل

إذا كان كل من  $u$  و  $v$  دالة قابلة للاشتقاق على فترة ما فإن :

- ١)  $\int u \, dv = uv - \int v \, du$  حيث  $u \in C^1$   
 ٢)  $\int [u \pm v] \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx$

فمثلاً  $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = \int \sin^2 x \, dx - \int \sin^4 x \, dx$

وأيضاً  $\int (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx$

$= \int \sin^2 x \, dx + \int \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \, dx + \int (1 - \sin^2 x) \, dx$

$= \int \sin^2 x \, dx + \int 1 \, dx - \int \sin^2 x \, dx = \int 1 \, dx = x + C$



### مثال

أوجد: ①  $\{ (3x^2 + x - 5) \}$  و ②  $\{ (4x^2 + 4x + 3) \}$  و

③  $\{ (2x^2 - \frac{3}{x}) \}$  و ④  $\{ (x - 3)(x + 3) \}$  و

### الحل

①  $\{ (3x^2 + x - 5) \}$  و

$= \{ 3x^2 + x - 5 \}$

$= \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + \text{ث} = \frac{3x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 5x + \text{ث}$

②  $\{ (4x^2 + 4x + 3) \}$  و

$= \{ 4x^2 + 4x + 3 \}$

$= \{ 4x^2 + 4x + 3 \}$

$= \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x + \text{ث} = \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 3x + \text{ث}$

$= \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + 3x + \text{ث}$

③  $\{ (2x^2 - \frac{3}{x}) \}$  و

$= \{ 2x^2 - \frac{3}{x} \}$

$= \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + \text{ث} = \frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + \text{ث}$

④  $\{ (x - 3)(x + 3) \}$  و

$= \{ (x^2 - 9) \}$

$= \frac{x^3}{3} - 9x + \text{ث} = \frac{x^3}{3} - 9x + \text{ث}$



تقنيات التكامل

$$1) \int (1 + \sin u)^n \cos u \, du = \frac{1}{1+u} + C, \text{ حيث } u = 1 + \sin u$$

أي أن تكامل (دالة من الدرجة الأولى في  $\sin$ )  $= \frac{1}{\text{معامل } \sin} + C$  (الدالة)  $1+u$  حيث  $u = 1 + \sin u$

$$2) \int [d(\sin u)]^n \cos u \, du = \frac{1}{1+u} + C, \text{ حيث } u = \sin u$$

ن عند نفس  $1-u$

أي أن تكامل (دالة)  $\cos u$  مشتقتها  $= \frac{1}{1+u} + C$  (الدالة)  $1+u$

فمثلاً  $\int (3 - \sin u)^5 \cos u \, du = \int (3 - \sin u)^5 \cos u \, du$

$$= \int (3 - \sin u)^5 \cos u \, du = \frac{1}{2} (3 - \sin u)^6 + C$$

ولإيجاد (دالة)  $\cos u$  مشتقتها مثل  $(3 - \sin u)^5$   $(3 - \sin u)^5$   $\cos u$

فإننا نلاحظ أن:

$$d(\sin u) = \cos u \, du, \text{ حيث } u = 3 - \sin u$$

$$\int (3 - \sin u)^5 \cos u \, du = \int (3 - \sin u)^5 \cos u \, du = \frac{1}{2} (3 - \sin u)^6 + C$$

مثال

أوجد:

$$1) \int (2 - \sin u)^2 \cos u \, du$$

$$2) \int (3 + \sin u)^2 \cos u \, du$$

$$3) \int \frac{8 + \sin^2 u}{2 + \sin u} \cos u \, du$$

الحل

$$1) \int (2 - \sin u)^2 \cos u \, du = \int (2 - \sin u)^2 \cos u \, du$$

$$= \int (2 - \sin u)^2 \cos u \, du = \frac{1}{3} (2 - \sin u)^3 + C$$



$$= \frac{1}{4}س^2 - \frac{4}{3}س + 1 + س + 1 = \frac{1}{4}س^2 - \frac{1}{3}س + 2$$

$$\textcircled{2} \left[ (س + \frac{3}{س})س^2 - (س + 2 + \frac{9}{س})س \right]$$

$$= [س^3 + س + 6س + 9] - [س^3 + 2س + 9س]$$

$$= \frac{س^3}{3} + \frac{6س}{1} + \frac{9س}{1} - \frac{س^3}{3} - 2س - 9س = 6س + 9س - 2س - 9س = 4س$$

$$\textcircled{3} \left[ \frac{س^5 - 4س^2 + 2س}{س^2} + س - [س^2 + 4س] \right]$$

$$= \frac{1}{3}س^3 - 4س + 2س - س^2 + 1 = \frac{1}{3}س^3 - س^2 - 2س + 1$$

$$\textcircled{4} \left[ \frac{س^3 + 8}{س + 2} - \frac{(س^2 - 2س + 4)(س + 2)}{(س + 2)} \right]$$

$$= [س^3 - 2س^2 + 4س + 8] - [س^3 + 2س^2 - 4س - 8]$$

$$= [س^3 - 2س^2 + 4س + 8] - [س^3 + 2س^2 - 4س - 8]$$

$$= \frac{1}{3}س^3 - 2س^2 + 4س + 8 - س^3 - 2س^2 + 4س + 8 = -4س^2 + 8س + 16$$

### مثال

أوجد:  $\textcircled{1} [ (3 - س)^3 + س ]$   $\textcircled{2} [ 4(س + 7)^2 + 9 ]$  و  $\textcircled{3} [ (س - 3)(س^2 - 6س + 9) ]$

$\textcircled{4} [ \frac{9}{(س + 2)^2} ]$

### الحل

$$\textcircled{1} [ (3 - س)^3 + س ] = \frac{1}{4} + \frac{1 + 3(3 - س)}{1 + 3} = \frac{1}{4} + \frac{1 + 9 - 3س}{4} = \frac{10 - 3س}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1(3 - س)}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3 - س}{4} = \frac{4 - س}{4}$$



$$\textcircled{2} \quad \left[ \epsilon (7 + s + 6) + s \right]$$

$$= \left[ \epsilon (7 + s + 6) + s \right] + 6 + s$$

$$= \left[ \epsilon (7 + s + 6) + s \right] + 6 + s + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \epsilon$$

$$= \left[ \epsilon (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{3} \quad \left[ \frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \epsilon = \left[ \frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{16}$$

$$= \left[ \frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{16} = \left[ \frac{1}{4} (7 + s + 6) + s \right] + \frac{1}{16}$$

$$\textcircled{4} \quad \left[ (3 - s) (3 - s) + s \right]$$

$$= \left[ (3 - s) (3 - s) + s \right] + s$$

$$= \left[ (3 - s) (3 - s) + s \right] + \frac{1}{4} = \left[ (3 - s) (3 - s) + s \right] + \frac{1}{4}$$

مثال

$$\textcircled{1} \quad \left[ s \left( \frac{3}{s} + 1 \right) + s \right] \quad \textcircled{2} \quad \left[ s \left( \frac{3}{s} + 1 \right) + s \right]$$

$$\textcircled{3} \quad \left[ s (2 + s) + s \right] \quad \textcircled{4} \quad \left[ \frac{3 + s}{1 + s} + s \right]$$

الحل

$$\textcircled{1} \quad \left[ s \left( \frac{3}{s} + 1 \right) + s \right] = \left[ s \left( \frac{3}{s} + 1 \right) + s \right] + s$$

$$= \left[ s (2 + s) + s \right] + \frac{1}{4} = \left[ s (2 + s) + s \right] + \frac{1}{4}$$



لاحظ ان

س = (س)<sup>١</sup>

$$② \quad \left| \text{س} \right| = \left| \frac{3}{س} + \frac{6}{س} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| \text{س} \left( \frac{3}{س} + \frac{6}{س} \right) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \left| \left[ \left( \frac{3}{س} + \frac{6}{س} \right) \text{س} \right]^{\frac{1}{2}} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| (3 + 6) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ و س}$$

$$= \frac{5}{49} (3 + 6) = \frac{5}{49} \times 9 = \frac{45}{49} \text{ و س}$$

$$③ \quad \left| \text{س} (2 + \text{س}) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

بإضافة ٢ وطرح ٢ من س

$$= \left| (\text{س} + 2)(2 + \text{س}) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \left| (\text{س} + 2)(2 + \text{س}) \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \left| (2 + \text{س})^2 \right|^{\frac{1}{2}} \text{ و س}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (2 + \text{س}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 + 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 4 = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$① \quad \left| \frac{3 + \text{س}}{4 + \text{س}} \right| \text{ و س} = \left| \frac{1 - (1 + 3 + \text{س})}{\frac{1}{2}(4 + \text{س})} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| \frac{1}{\frac{1}{2}(4 + \text{س})} - \frac{(4 + \text{س})}{\frac{1}{2}(4 + \text{س})} \right| \text{ و س}$$

$$= \left| \frac{1}{\frac{1}{2}(4 + \text{س})} - \frac{(4 + \text{س})}{\frac{1}{2}(4 + \text{س})} \right| \text{ و س}$$

$$= \frac{2}{4} - \frac{(4 + \text{س})}{2} = \frac{2}{4} - \frac{4 + \text{س}}{2} = \frac{2}{4} - \frac{4}{2} - \frac{\text{س}}{2} = \frac{2}{4} - 2 - \frac{\text{س}}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{\text{س}}{2}$$



### مثال ٨

أوجد :

- ١ |  $6 \sin(3 - 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x)$  و  $\sin$
- ٢ |  $\frac{4 \sin^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2}$  و  $\sin$
- ٣ |  $(2 \sin x - 3)(\sin^2 x - 2 \sin x + 5)$  و  $\sin$
- ٤ |  $\sin \sqrt{5 \sin^2 x + 9}$  و  $\sin$

### الحل

١ |  $6 \sin(3 - 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x)$  و  $\sin$

د:  $3 = (u)$  د:  $4 \cos^2 x + 3 = 4(1 - \sin^2 x) + 3 = 7 - 4 \sin^2 x$  و  $6 = (u)$

د:  $6 \sin(3 - 2 \sin^2 x + 4 \cos^2 x) = 6 \sin(7 - 4 \sin^2 x)$  و  $\sin$   $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} (7 - 4 \sin^2 x) = \frac{1}{4} \frac{d}{dx} (7 - 4 \sin^2 x)$  و  $\sin$

٢ |  $\frac{4 \sin^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2}$  و  $\sin$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (1 + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (1 + \sin^2 x)$  و  $\sin$

د:  $1 = (u)$  د:  $1 + \sin^2 x = 1 + \sin^2 x$  و  $1 = (u)$

د:  $\frac{4 \sin^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2} = \frac{4 \sin^2 x}{(1 + \sin^2 x)^2}$  و  $\sin$   $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (1 + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (1 + \sin^2 x)$  و  $\sin$

٣ |  $(2 \sin x - 3)(\sin^2 x - 2 \sin x + 5)$  و  $\sin$

د:  $3 = (u)$  د:  $5 - 2 \sin x + \sin^2 x = 5 - 2 \sin x + \sin^2 x$  و  $3 = (u)$

د:  $(2 \sin x - 3)(\sin^2 x - 2 \sin x + 5) = (2 \sin x - 3)(\sin^2 x - 2 \sin x + 5)$  و  $\sin$   $\frac{1}{8} = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} (5 - 2 \sin x + \sin^2 x) = \frac{1}{8} \frac{d}{dx} (5 - 2 \sin x + \sin^2 x)$  و  $\sin$

٤ |  $\sin \sqrt{5 \sin^2 x + 9}$  و  $\sin$

د:  $9 = (u)$  د:  $9 + 5 \sin^2 x = 9 + 5 \sin^2 x$  و  $9 = (u)$

د:  $\sin \sqrt{5 \sin^2 x + 9} = \sin \sqrt{5 \sin^2 x + 9}$  و  $\sin$   $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} \frac{d}{dx} (9 + 5 \sin^2 x) = \frac{1}{10} \frac{d}{dx} (9 + 5 \sin^2 x)$  و  $\sin$

د:  $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} \frac{d}{dx} (9 + 5 \sin^2 x) = \frac{1}{10} \frac{d}{dx} (9 + 5 \sin^2 x)$  و  $\sin$



- ١]  $ها س و س = - هتا س + ث$   
٢]  $ها س و س = هتا س + ث$   
٣]  $قا^2 س و س = طا س + ث$   
حيث ث ثابت اختياري

ملاحظة هامة

- ١]  $ها (ا س + ب) و س = - \frac{1}{ب} هتا (ا س + ب) + ث$   
٢]  $ها (ا س + ب) و س = \frac{1}{ب} هتا (ا س + ب) + ث$   
٣]  $قا^2 (ا س + ب) و س = \frac{1}{ب} طا (ا س + ب) + ث$   
حيث ث ثابت اختياري

لنمثلاً ]  $(س - ها س) و س = \frac{1}{ب} س + هتا س + ث$

وأيضاً ]  $(ا هتا س + \frac{1}{ب} س + ث) و س$

$= (ا هتا س + قا^2 س + ث) و س = ا هتا س + طا س + ث$   
كما أن ]  $ها (ا س + ب) و س = \frac{1}{ب} هتا (ا س + ب) + ث$

ملاحظة هامة

- ١]  $ها^2 س + ها س = 1$   
٢]  $ها س + 1 = طا س = قا^2 س$   
٣]  $ها^2 س - ها س = هتا س = ٢ س$   
٤]  $٢ - ها س = هتا س = ٢ س$   
٥]  $ها س = \frac{1}{ب} هتا س + \frac{1}{ب} س$   
٦]  $٢ هتا س = ١ - هتا س = ٢ س$   
٧]  $ها س = \frac{1}{ب} هتا س + \frac{1}{ب} س$   
٨]  $ها س = \frac{1}{ب} هتا س + \frac{1}{ب} س$

ملاحظة هامة

$\frac{س}{و س} [د (س) و س = د (س)]$   $\frac{س}{و س} [د (س) و س = د (س)]$



## مثال

- أوجد،  
 ①  $\{ (س^2 + ها س) و س \}$  ②  $\{ (ها س + ٣) و س \}$   
 ③  $\{ (٣ س - قا^٢ س) و س \}$  ④  $\{ (ها ٢ س + قا^٢ س) و س \}$

## الحل

- ①  $\{ (س^2 + ها س) و س \} = \frac{1}{٣} س^٣ + ها س + ث$   
 ②  $\{ (ها س + ٣) و س \} = ٥ - ها س + ٣ س + ث$   
 ③  $\{ (٣ س - قا^٢ س) و س \} = \frac{٣}{٣} س^٣ - طا س + ث$   
 ④  $\{ (ها ٢ س + قا^٢ س) و س \} = -\frac{1}{٣} ها س + \frac{1}{٣} طا س + ث$

## مثال

أوجد،

- ①  $\{ ها (١ + \frac{س}{٣}) و س \}$  ②  $\{ ها (٥ س - ٣) و س \}$   
 ③  $\{ (ها^٢ س + ها^٢ س) و س \}$  ④  $\{ (١ + طا^٢ س) و س \}$

## الحل

- ①  $\{ ها (١ + \frac{س}{٣}) و س \} = ٢ - ها (١ + \frac{س}{٣}) + ث$  **ملاحظة**  
 ②  $\{ ها (٥ س - ٣) و س \} = \frac{1}{٥} ها (٥ س - ٣) + ث$   
 ③  $\{ (ها^٢ س + ها^٢ س) و س \} = ١ و س = س + ث$   
 ④  $\{ (١ + طا^٢ س) و س \} = قا^٢ س و س = طا س + ث$



## مثال ١١

أوجد :

- ١)  $\{ (x^2 + 2x) \cdot x \}$       ٢)  $\left\{ \frac{2x^2}{x^2 + x} \cdot x \right\}$
- ٣)  $\{ (x^2 + 2x) \cdot x \}$       ٤)  $\left\{ \left( x^2 + 2x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot x \right\}$

## الحل

### الحل الأول

١)  $\{ (x^2 + 2x) \cdot x \}$   
 $\{ x^3 + 2x^2 \} =$   
 $\{ x^2(x + 2) \}$   
 $\{ x^2(x + 2) \} =$   
 $\{ x^2(x + 2) \} =$

٢)  $\left\{ \frac{2x^2}{x^2 + x} \cdot x \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^2 \cdot x}{x^2 + x} \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^3}{x(x + 1)} \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^2}{x + 1} \right\} =$

$\{ (x^2 - 2x) \cdot x \} =$   
 $\{ x^3 - 2x^2 \} =$   
 $\{ x^2(x - 2) \} =$

### الحل الثاني

١)  $\{ (x^2 + 2x) \cdot x \}$   
 $\{ x^3 + 2x^2 \} =$   
 $\{ x^2(x + 2) \} =$   
 $\{ x^2(x + 2) \} =$

٢)  $\left\{ \frac{2x^2}{x^2 + x} \cdot x \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^2 \cdot x}{x^2 + x} \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^3}{x(x + 1)} \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^2}{x + 1} \right\} =$

### الحل الثالث

١)  $\{ (x^2 + 2x) \cdot x \}$   
 $\{ x^3 + 2x^2 \} =$   
 $\{ x^2(x + 2) \} =$   
 $\{ x^2(x + 2) \} =$

٢)  $\left\{ \frac{2x^2}{x^2 + x} \cdot x \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^2 \cdot x}{x^2 + x} \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^3}{x(x + 1)} \right\} =$   
 $\left\{ \frac{2x^2}{x + 1} \right\} =$







مسائل المستوى الأول

اختر

المشتقة العكسية للدالة (٣ - س) هي .....

١ | س - ٢ س + ث في س - ٢ س + ٣ س في س - ٢ س + ث في ٢ س - ٢ س + ٣ س

٢ | المشتقة العكسية للدالة (٣ - س - ٢ س + ٥) هي .....

٣ | س - ٢ س - ٢ س + ٢ س + ٥ س في ٣ س - ٢ س - ٢ س + ٢ س + ٥ س في

س - ٢ س - ٢ س + ٢ س + ٥ س في س - ٢ س - ٢ س + ٢ س + ٥ س + ث في

٤ |  $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$  .....

[ ٥ س + ث في  $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$  ث في  $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$  س في  $\frac{1}{5} = \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$  س + ث في ]

٥ |  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$  .....

[  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$  ث في  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$  س في  $\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$  س + ث في ]

٦ |  $\left( \frac{1}{5} + \frac{5}{16} \right) = \frac{1}{5} + \frac{5}{16} = \frac{1}{5} + \frac{5}{16}$  .....

[ ١٠ س +  $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$  س + ث في ١٠ س +  $\frac{1}{10} = \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$  س + ث في ]

[  $\frac{5}{16} + \frac{1}{5} = \frac{5}{16} + \frac{1}{5} = \frac{5}{16} + \frac{1}{5}$  س في  $\frac{5}{16} + \frac{1}{5} = \frac{5}{16} + \frac{1}{5}$  س + ث في ]

٧ |  $\left( \frac{\pi}{4} + ٥ س \right) = \frac{\pi}{4} + ٥ س = \frac{\pi}{4} + ٥ س$  .....

[  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  س + ث في  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  س -  $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$  س + ث في ]

[ س - ٥ س + ث في س - ٥ س + ث في ]

٨ |  $\left( \frac{\pi}{4} - س \right) = \frac{\pi}{4} - س = \frac{\pi}{4} - س$  .....

[  $\frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$  س -  $\frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$  س في ٢ س -  $\frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$  س + ث في ]

[ س -  $\frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$  س + ث في س -  $\frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2}{4}$  س - ث في ]



$$\textcircled{8} \quad \{ (s+5)^2 \text{ و } s = \dots \}$$

$$\begin{aligned} & \{ (s+5)^2 \text{ و } s = \dots \} \\ & \left[ \frac{1}{4}(s+5)^2 \text{ و } \frac{1}{4}(s+5)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\textcircled{9} \quad \{ (s^2 - 2s + 1) \text{ و } s = \dots \}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{11}(s-1)^2 \text{ و } \frac{1}{11}(s-1)^2 \right] \\ & \left[ \frac{1}{11}(s-1)^2 \text{ و } \frac{1}{11}(s-1)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\textcircled{10} \quad \{ (s^2 + 2s + 1) \text{ و } s = \dots \}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{14}(s^2 + 2s + 1) \text{ و } \frac{1}{14}(s^2 + 2s + 1) \right] \\ & \left[ \frac{1}{14}(s^2 + 2s + 1) \text{ و } \frac{1}{14}(s^2 + 2s + 1) \right] \end{aligned}$$

$$\textcircled{11} \quad \left\{ \frac{8s^2 - 4s + 1}{(s^2 + 2s + 1)^2} \text{ و } s = \dots \right\}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{8(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } \frac{1}{8(s^2 + 2s + 1)} \right] \\ & \left[ \frac{1}{8(s^2 + 2s + 1)} \text{ و } \frac{1}{8(s^2 + 2s + 1)} \right] \end{aligned}$$

$$\textcircled{12} \quad \{ s^2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right) \text{ و } s = \dots \}$$

$$\begin{aligned} & \{ s^2 \left( \frac{1}{s} - 1 \right) \text{ و } s = \dots \} \\ & \left[ \frac{1}{4}(s-1)^2 \text{ و } \frac{1}{4}(s-1)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\textcircled{13} \quad \{ (s - \frac{1}{s})(s + \frac{1}{s})(s + \frac{1}{s}) \text{ و } s = \dots \}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \text{ و } \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \right] \\ & \left[ \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \text{ و } \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \right] \end{aligned}$$

$$\textcircled{14} \quad \left\{ \frac{(s+1)^2}{s^2} \text{ و } s = \dots \right\}$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \text{ و } \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \right] \\ & \left[ \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \text{ و } \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 + \frac{1}{8}s^2 \right] \end{aligned}$$



$$\textcircled{15} \quad \left[ \left( \text{معا س حثا} - \frac{\pi}{4} \right) \text{ معا س حثا} \right] \frac{\pi}{4} = \text{س} = \dots$$

$$\left[ \text{معا} \left( \text{س} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{ث} \right] - \left[ \text{معا} \left( \text{س} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{ث} \right]$$

$$- \left[ \text{معا} \left( \text{س} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{ث} \right] \text{ معا} \left( \frac{\pi}{4} + \text{س} \right) + \text{ث}$$

$$\textcircled{16} \quad \left[ \left( \text{قا}^2 \text{س} - \text{طا}^2 \text{س} \right) \text{ و س} = \dots \right]$$

$$\left[ \text{س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{17} \quad \left[ \frac{\text{معا}^2 \text{س}}{\text{س} + 1} \text{ و س} = \dots \right] \left[ \text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right]$$

$$\left[ \text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{س} + \text{معا س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{18} \quad \left[ \left( \text{معا}^2 \text{س} \text{ و س} = \dots \right) \text{ حيث س} \in [0, \pi] \right]$$

$$\left[ - \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{معا س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{19} \quad \left[ \left( \text{طا}^2 \text{س} \text{ و س} = \dots \right) \right]$$

$$\left[ \text{قا}^2 \text{س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{قا}^2 \text{س} \right] \text{ و } \left[ \text{طا}^2 \text{س} \right] \text{ و } \left[ \text{طا}^2 \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{20} \quad \left[ \left( \text{معا س} \text{ و س} = \dots \right) \right]$$

$$\left[ \frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} + \text{ث} \right] - \left[ \frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\left[ \frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} \right] \text{ و } \left[ \frac{1}{4} \text{معا}^2 \text{س} + \text{ث} \right]$$

$$\textcircled{21} \quad \left[ \left( \text{س}^2 + \text{س} \right) \text{ و س} = \dots \right]$$

$$\left[ \text{س}^2 + \text{س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{س}^2 + \text{س} \right] \text{ و } \left[ \text{س}^2 + \text{س} \right] \text{ و } \left[ \text{س}^2 + \text{س} \right]$$

$$\textcircled{22} \quad \left[ \left( \text{س}^2 \right) \text{ و س} = \dots \right]$$

$$\left[ \text{س}^2 \right] \text{ و } \left[ \text{س}^2 \right] \text{ و } \left[ \text{س}^2 \right] \text{ و } \left[ \text{س}^2 \right]$$

٢٠ آخر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

$$\textcircled{1} \quad \left[ \text{إذا كانت د (س)} = \left[ \text{معا س و س فلان د (0) - د (\pi) \right] = \dots \right]$$

$$\left[ 0 \right] \text{ و } \left[ 0 \right] \text{ و } \left[ 0 \right] \text{ و } \left[ 0 \right]$$

$$\textcircled{2} \quad \left[ \text{معا}^2 \text{س} \text{ و س} = \dots \right]$$

$$\left[ \text{معا س} \right] \text{ و } \left[ \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{معا س} + \text{ث} \right] \text{ و } \left[ \text{معا س} + \text{ث} \right]$$







مسائل المستوى الثاني

٤ واحد

- ١)  $\{ 9s^2 + 6s \}$  :  
 ٢)  $\{ 5s^2 + 4s \}$   
 ٣)  $\{ 8s^2 + 6s \}$   
 ٤)  $\{ 10s^2 + 8s \}$   
 ٥)  $\{ 12s^2 + 10s \}$   
 ٦)  $\{ 14s^2 + 12s \}$   
 ٧)  $\{ 16s^2 + 14s \}$   
 ٨)  $\{ 18s^2 + 16s \}$   
 ٩)  $\{ 20s^2 + 18s \}$   
 ١٠)  $\{ 22s^2 + 20s \}$

أوجد ما يلي

- ١)  $\{ (s-5)(s+1) \}$   
 ٢)  $\{ (s-4)(s+2) \}$   
 ٣)  $\{ (s-3)(s+4) \}$   
 ٤)  $\{ (s-2)(s+5) \}$   
 ٥)  $\{ (s-1)(s+6) \}$   
 ٦)  $\{ (s)(s+7) \}$   
 ٧)  $\{ (s+1)(s+8) \}$   
 ٨)  $\{ (s+2)(s+9) \}$   
 ٩)  $\{ (s+3)(s+10) \}$   
 ١٠)  $\{ (s+4)(s+11) \}$   
 ١١)  $\{ (s+5)(s+12) \}$   
 ١٢)  $\{ (s+6)(s+13) \}$   
 ١٣)  $\{ (s+7)(s+14) \}$   
 ١٤)  $\{ (s+8)(s+15) \}$   
 ١٥)  $\{ (s+9)(s+16) \}$   
 ١٦)  $\{ (s+10)(s+17) \}$   
 ١٧)  $\{ (s+11)(s+18) \}$   
 ١٨)  $\{ (s+12)(s+19) \}$



$$[ (1 - x) (1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots) ] [ (1 - x) (1 - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + \dots) ]$$

$$x \frac{y(1+x-2y)}{y(1-y)} \Big|_{y=0}^{y=1} \quad (9)$$

$$\left\{ \frac{s}{(1+s)^2} \right\} \quad (23) \quad (24)$$

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{s^2 + 1} + s^2 + 1 + s$$

②  $s(s+2)^2$

$$\frac{(2-s)(1+s)}{s} \quad (2)$$

③ 23 (س) ۱۲۱

۱۵۰۰ (۵۰۰ + ۱۰۰۰) سے ۷۰۰

١٥٠ (١٥٠) (١٥٠) (١٥٠)

$$\textcircled{3} \{ (3 \text{ مں } 1 + 1 \text{ مں}) (3 \text{ مں } 2 + 2 \text{ مں } 1 + 1 \text{ مں}) \}$$

$$\frac{1}{(1+x)^2}$$

**اُجود** خدایم بانی :

② ۲۱ س ۲۰ س ۱۹ س ۱۸ س ۱۷ س ۱۶ س ۱۵ س ۱۴ س ۱۳ س ۱۲ س ۱۱ س ۱۰ س ۹ س ۸ س ۷ س ۶ س ۵ س ۴ س ۳ س ۲ س ۱ س

(۹) (۵ ماہ سے - ۳ ماہ سے) کی عمر

4. (3+3+3) (3+3+3) (3+3+3)

⑤ ﴿٩﴾ (٩ ص - نا ٣ ص) و س

④ 24 [ 24 - 2 ] 24

⑤ ﴿يُنْفِئُ﴾ [عَنْ (هـ) س (١) وَ س]

⑧ ⑨ (منافس) (منا)

ما  $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$  و  $\sin$

1000

10

acknowledges the

Copyright © 2000 by John Wiley & Sons, Inc.

[illegible]

1000

④ 2008 年 12 月 1 日

[illegible]

$$\textcircled{19} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

(5) (مکملہ معنی) (فاس) (مکملہ معنی)

① ۱۸۰۰ تا ۱۸۵۰

(۱۷)  $\left(\frac{\text{مٹا می}}{\text{مٹا می}}\right)$  و م

1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 26

100 دس



مسائل تقيس مستويات عليا في التفكير

٢. أوجد كلاً مما يأتي

١.  $\left| \frac{15}{8} \right|$  من  $(3 - 3)$  من  $2$  من  $3$

٢.  $\left| \frac{1+2}{(3+3)} \right|$  من  $3$

٣.  $\left| \frac{1+3}{(1+3)} \right|$  من  $3$

٤.  $\left| \frac{3}{(3+3)} \right|$  من  $3$

٥.  $\left| \frac{3}{(3+3)} \right|$  من  $3$

٦.  $\left| \frac{1-3}{(3-3)} \right|$  من  $3$

٧.  $\left| \frac{3-3}{(3-3)} \right|$  من  $3$

٨.  $\left| \frac{3-3}{(3-3)} \right|$  من  $3$

٣. أوجد كلاً مما يأتي

١.  $\left| \frac{1}{(3+3)} \right|$  من  $3$

٢.  $\left| \frac{1}{(3+3)} \right|$  من  $3$

٣.  $\left| \frac{1}{(3+3)} \right|$  من  $3$

٤.  $\left| \frac{1}{(3+3)} \right|$  من  $3$

2023



## ثالثًا: حساب المثلثات

### الوحدة الرابعة:

- الدرس ① : إيجاد الزوايا والارتفاع
- الدرس ② : إيجاد الارتفاع والمساحة
- الدرس ③ : إيجاد المساحة والمساحة
- الدرس ④ : مساحة المساحة





# مراجعة الوحدة

## زوايا الارتفاع والانخفاض (تطبيقات على حل المثلث)

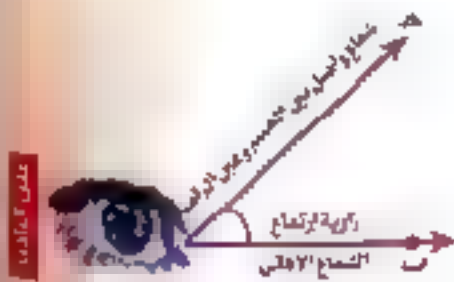
المحلول

١

درسنا في العام السابق زوايا الارتفاع والانخفاض كتطبيق على حل المثلث القائم الزاوية وأمكن إيجاد ارتفاع المبنى عن سطح الأرض دون أن نقوم بقياس الارتفاع هذه المبنى وبعد دراستنا لقانوني الجيب وجيب التمام فإنه يمكننا دراسة تطبيقات أكثر عمقاً على حل المثلث تشمل زوايا الارتفاع والانخفاض بوجه عام وسوف نتذكر فيما يلي مفهوم زاويتي الارتفاع والانخفاض.

### زاوية الارتفاع

إذا رصد شخص  $A$  نقطة  $B$  أعلى من مستوى نظره الأفقي  $AB$  فإن الزاوية بين  $AB$  و  $AC$  تسمى زاوية ارتفاع  $B$  عن المستوى الأفقي لنظر الشخص  $A$



### زاوية الانخفاض

إذا رصد شخص  $A$  نقطة  $B$  أسفل من مستوى نظره الأفقي  $AB$  فإن الزاوية بين  $AB$  و  $AC$  تسمى زاوية انخفاض  $B$  عن المستوى الأفقي لنظر الشخص  $A$





### لاحظ أن

إذا كان من هو قياس زاوية ارتفاع  $B$  بالنسبة إلى  
 ويمكن من هو قياس زاوية انخفاض  $A$  بالنسبة  
 إلى  $B$  فإن  $B = A$  من وذلك لأنهما متبادلتان



### مثال

من نقطة على سطح الأرض رصبت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها  $36^\circ$  ثم  
 حلز الرصاصة مسافة 65 متراً في خط مستقيم أفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس  
 زاوية ارتفاع قمة البرج  $53^\circ$  أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر

### الحل

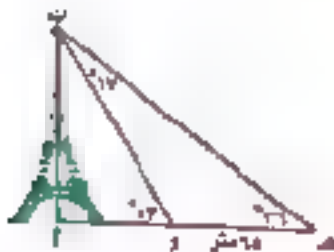
بفرض أن  $B$  هو ارتفاع البرج ، و  $(D, B, A)$   $53^\circ = 36^\circ - 17^\circ$

$$\text{في } \triangle DAB : \frac{DB}{\sin 36^\circ} = \frac{65}{\sin 17^\circ}$$

$$\therefore DB = \frac{65 \sin 36^\circ}{\sin 17^\circ} = 131.68 \text{ متر}$$

$$\text{في } \triangle DAB : \frac{AB}{\sin 53^\circ} = \frac{DB}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore AB = 131.68 \sin 53^\circ \approx 104 \text{ متر}$$



### ملاحظة

عند حل المسألة إذا كان الشكل يحتوي على مثلثين فإننا نبدأ الحل من المثلث المعطى  
 طول أحد أضلاعه.



## مثال

من طائرة هليكوبتر ثابتة على ارتفاع ١٠٠ متر من سطح الأرض في مستوا رأسي  
إنخفاض سيارتين  $P$  ،  $Q$  على سطح الأرض فكانا  $30^\circ$  ،  $45^\circ$  أوجد لأقرب متر المسافة  
بين مقدمتي السيارتين. علماً بأن الطائرة والسيارتين  $P$  ،  $Q$  في مستوى رأسي واحد  
وأن مسقط الطائرة في مستوى سطح الأرض  $R$   $\overline{PQR}$

## الحل

بفرض أن ارتفاع الطائرة هو  $h$

$$\text{في } \triangle PQR : \frac{h}{\sin 45^\circ} = \frac{100}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore h = \frac{100 \sin 45^\circ}{\sin 90^\circ} = 141.42 \text{ متر}$$

$$\therefore \angle PQR = (90^\circ + 30^\circ) - 45^\circ = 75^\circ$$

$$\text{في } \triangle PQR : \frac{h}{\sin 75^\circ} = \frac{PQ}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore \frac{h}{\sin 75^\circ} = \frac{PQ}{\sin 90^\circ}$$

$$\therefore PQ = \frac{h \sin 90^\circ}{\sin 75^\circ} = \frac{141.42 \sin 90^\circ}{\sin 75^\circ} = 147 \text{ متر}$$





### مثال ٢

برج ارتفاعه ١٠٠ متر مقام على صخرة من نقطة على سطح الأرض من المستوى الأفقي المار بقاعدة الصخرة قياست زاوية ارتفاع قمة ولادة البرج فوجدت  $46^\circ$  على الترتيب أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر.

### الحل



$$\angle B = 46^\circ - 30^\circ = 16^\circ$$

$$\angle D = 30^\circ - 14^\circ = 16^\circ$$

$$\text{في المثلث } ABD: \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{100 \text{ م}} = \frac{1}{\tan 16^\circ}$$

$$BD = \frac{100 \text{ م}}{\tan 16^\circ}$$

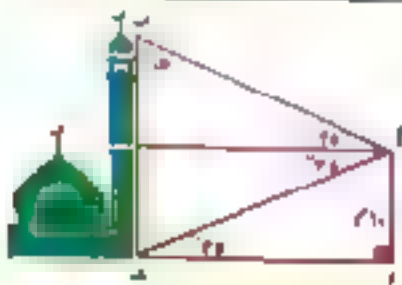
$$\text{في المثلث } BCD: \frac{BD}{CD} = \frac{BD}{100 \text{ م}} = \frac{1}{\tan 30^\circ}$$

$$BD = 100 \text{ م} \times \tan 30^\circ$$

$$\text{بالتعويض من ١ في ٢ ينتج أن: } BD = \frac{100 \text{ م} \times \tan 16^\circ}{\tan 30^\circ} = 35 \text{ متر}$$

### مثال ٣

من سطح مبنى يرتفع ١٠ متر عن سطح الأرض ليست زاوية ارتفاع قمة ملدنة فكانت  $25^\circ$  وقيست زاوية انخفاض قاعدة الملدنة فكانت  $35^\circ$  أوجد ارتفاع الملدنة عن سطح قاعدة الملدنة والمبنى على مستوى أفقي واحد.



### الحل

$$\angle A = 25^\circ$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{10 \text{ م}}{BD}$$



$$\therefore \frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{AC}{\sin 35^\circ}$$

$$\therefore AB = \frac{AC \sin 90^\circ}{\sin 35^\circ} = \frac{17.43 \sin 90^\circ}{\sin 35^\circ}$$

$$\therefore AB = \frac{17.43 \sin 90^\circ}{\sin 35^\circ} = 31.61 \text{ متر}$$

$$\text{في } \triangle ABC: \frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore BC = \frac{AB \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{31.61 \sin 90^\circ}{\sin 45^\circ} = 44.72 \text{ متر}$$

### مثال

من نقطة على سطح الأرض وجد أن زاوية ارتفاع قمة برج هي  $90^\circ$  ومن نقطة ترتفع عن سطح الأرض بمقدار 3 متر وتعلوا الأولى مباشرة وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج  $30^\circ$  أوجد ارتفاع البرج إلى أقرب متر.

### الحل

بفرض أن  $AB$  ارتفاع البرج

$$\text{في } \triangle ABC: \frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}$$

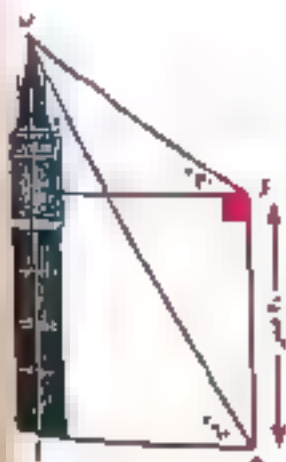
$$\therefore AB = \frac{AC \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore \frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ}$$

$$\therefore AB = \frac{AC \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{36.72 \sin 90^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$\text{في } \triangle ABC: \frac{AB}{\sin 90^\circ} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore BC = \frac{AB \sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{36.72 \sin 90^\circ}{\sin 60^\circ} = 42.31 \text{ متر}$$





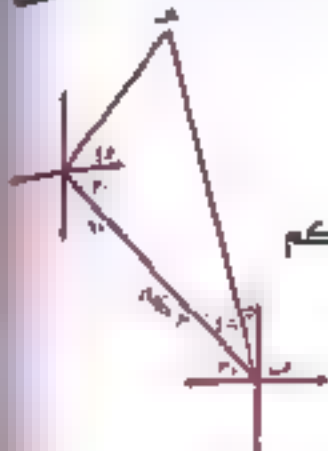




## مثال ٧

تسير سفينة بسرعة ١٥ كم/ساعة في اتجاه شرق الجنوب بزاوية قياسها  $٩٠^\circ$  رصد أحد رعاكها هدف ثابت في اتجاه الشمال الشرقي وبعد ساعتين وجد الراكب أن الهدف أصبح في اتجاه  $٩٢^\circ$  غرب الشمال أحسب بعد الهدف من السفينة في هذه اللحظة لأقرب حكم.

## الحل



بفرض أن الوضع الأول للسفينة هو أ

والوضع الثاني للسفينة هو ب وموقع الهدف جـ

∴ المسافة التي قطعها السفينة في ساعتين  $= 2 \times 15 = 30$  كم

$$\angle ٧٥ = ٩٠ + ٨٥ = (\text{جـ ب أ})$$

$$\angle ٤٨ = (٩٠ + ٩٢) - ٩٠ = (\text{ب ج أ})$$

$$\angle ٥٧ = (٤٨ + ٧٥) - ٩٠ = (\text{جـ ب أ})$$

$$\frac{\text{ب ج أ}}{\sin ٧٥} = \frac{٣٠}{\sin ٥٧}$$

$$\frac{\text{ب ج أ}}{\sin ٧٥} = \frac{٣٠}{\sin ٥٧}$$

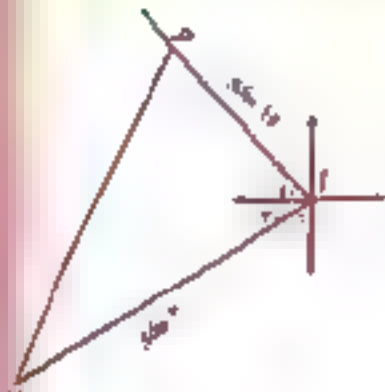
$$\therefore \text{ب ج أ} = \frac{٣٠ \sin ٧٥}{\sin ٥٧} = ٣٤,٥٥ \text{ كم}$$

∴ بعد السفينة عن الهدف لأقرب حكم  $= ٣٥$  كم

## مثال ٨

تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه  $٩٠^\circ$  غرب الجنوب بسرعة ١٠ كم/ساعة وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس المكان في اتجاه  $٤٠^\circ$  شمال الغرب بسرعة ٥ كم/ساعة أوجد البعد بين السفينتين بعد ٣ ساعات

## الحل



بفرض أن النقطة التي تحركت منها السفينة

هي أ وتحركت إلى ب والسفينة الأخرى تحركت إلى جـ

∴ المسافة التي قطعها السفينة الأولى في

$$٣ \text{ ساعات} = 3 \times ١٠ = ٣٠ \text{ كم}$$

والمسافة التي قطعها السفينة الثانية في



$$٢٨٠٠ = ٢ \times ٥ = ١٥ \text{ كم}$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (١٥) + (٣٠) = ٤٥^\circ$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (١٥) + (٣٠) = ٤٥^\circ$$

$$٨١٧٠٠٨٢ = \angle \gamma = ٤٥^\circ \times ١٥ \times ٣٠ \times ٢ = (١٥) + (٣٠) =$$

$$\angle \gamma = ٢٨٠٥٩ \text{ كم}$$

الارتفاع بين السفينتين = ٢٨٠٥٩ كم

## مثال

رصد رجل من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة كل زاوية إرتفاع قمة التل فوجدتها  $٢٨^\circ$  ثم تحركت الرصد جهة التل على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها  $٨^\circ$  مسافة ١٠٠ متر ووجد قمة التل مرة أخرى فوجد أن قياس زاوية إرتفاعها  $٥٠^\circ$  أوجد إرتفاع التل لأقرب متر

## الحل

يفرض أن  $١$  ب إرتفاع التل وأن  $٢$  و  $٣$  نقطتا الرصد

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (١٥) + (٣٠) = ٤٥^\circ$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (١٥) + (٣٠) = ٤٥^\circ$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (١٥) + (٣٠) = ٤٥^\circ$$

$$\angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta = (١٥) + (٣٠) = ٤٥^\circ$$

$$\frac{١٠٠}{\sin ٢٢^\circ} = \frac{١٣٨}{\sin ٩٠^\circ}$$

$$\therefore ١٠٠ = \frac{١٣٨ \sin ٩٠^\circ}{\sin ٢٢^\circ} = ٧١٤٠٤٩ \text{ متر}$$

$$\frac{١٠٠}{\sin ٩٠^\circ} = \frac{١٣٨}{\sin ٢٨^\circ}$$

$$\therefore ١٠٠ = \frac{١٣٨ \sin ٢٨^\circ}{\sin ٩٠^\circ} = ٣٣٥ \text{ متر}$$





المستند على  
هذا الكتاب  
هو كتاب  
المعزى

راجع معنا واختر لنفسك

عزيزي الطالب

في هذا المكان من كل تمرين مستجد

أمثلة لمراجعة ما سبق في صورة إختيار تراكمي على ما سبق دراسة يتم الإجابة في نفس الورقة قبل أن تدخل في الدرس الجديد وهذا يجعلك تتذكر ما درست بإستمرار ولا تنساه ويجعلك في مراجعة مستمرة لدروسك السابقة مما يجعلك في تواصل مع ما درست رأياً يعودك على التفكير بطريقة مبتكرة وهذه الميزة يقدمها لك كتاب الماهر فقط.

مسائل المستوى الأول

١ شاهد شخص قمة ملئنة فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمته  $40^\circ$  أوجد ارتفاع الملئنة إذا كان البعد بين الشخص وقاعدة الملئنة ٥ متر (١٢ متر)

٢ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها  $34^\circ$  ثم سار الراصد مسافة ٩٢ مترًا في خط مستقيم أفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج  $51^\circ$  أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر. (٩٢ متر)

٣ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها  $25^\circ$  ثم سار الراصد في خط مستقيم مسافة ٥٧ مترًا في المستوى الأفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج  $52^\circ 40'$  أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر (١١ متر)

٤ من نقطة على سطح الأرض رصد رجل زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها  $12^\circ$  ولما سار مبتعدًا عن قاعدة البرج في طريق أفقي مسافة ٥٠ متر وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج  $20^\circ 30'$  أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر. (١٧ متر)





## مسائل المستوى الثاني

١٢٣ من قمة تل رصد رجل قياس زاويتي إنخفاض قمة برج وقاعدته فكانتا  $30^\circ$  ،  $42^\circ$  على الترتيب فإذا كان ارتفاع البرج ٥٠ مترًا فأوجد ارتفاع التل لأقرب متر علما بأن قاعدة التل والبرج في مستوى أفقي واحد. [١٢٣ متر]

١٢٤ من قمة تل وجد راصد أن قياس زاويتي إنخفاض قمة برج وقاعدته هما  $29^\circ$  ،  $65^\circ$  على الترتيب فإذا كان ارتفاع البرج ٢٠ متر فأحسب ارتفاع التل لأقرب متر علما بأن قاعدة التل والبرج في مستوى أفقي واحد. [١٢٤ متر]

١٢٥ من قمة برج ارتفاعه ٦٥ مترًا ليست زاويتا إنخفاض النقطتين A ، B على الأرض فكانتا  $33^\circ$  ،  $42^\circ$  على الترتيب ، فإذا كانت A تمثل قاعدة البرج ، B و C فأحسب طول AB لأقرب متر [١٢٥ متر]

١٢٦ برج ارتفاعه ٧٠ متر مقام على صخرة ، من نقطة على سطح الأرض في المستوى الأفقي A المار بقاعدة الصخرة ليست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة البرج فوجدنا  $33^\circ$  ،  $65^\circ$  على الترتيب أوجد ارتفاع الصخرة لأقرب متر. [١٢٦ متر]

١٢٧ منارة ارتفاعها ٦٠ مترًا مقامة على تل بالقرب من شاطئ بحر ليست زاويتا ارتفاع قمة وقاعدة المنارة من قارب فوق سطح البحر فوجدنا  $40^\circ$  ،  $60^\circ$  على الترتيب أوجد ارتفاع التل عن سطح البحر لأقرب متر. [١٢٧ متر]

١٢٨ من قمة برج ارتفاعه ٨٥ متر وصدت زاوية ارتفاع قمة جبل وجئت  $29^\circ$  ، ثم وصدت قمة الجبل من قاعدة البرج فوجدت  $40^\circ$  ،  $52^\circ$  أحسب ارتفاع الجبل لأقرب متر [١٢٨ متر]

١٢٩ ليست زاوية ارتفاع قمة برج لم يكتمل بناؤه من نقطة على بعد ١٠٠ متر من قاعدته فوجد أن قياسها  $30^\circ$  ، كم متر يجب أن ترتفع قمة البرج حتى يصبح قياس زاوية ارتفاعها من نفس النقطة يساوي  $45^\circ$  [١٢٩ متر]

١٣٠ قارب بحاري يتحرك في الماء في خط مستقيم نحو صخرة بسرعة منتظمة ٣٠ متر/دقيقة وعند لحظة معينة رصدت من القارب زاوية ارتفاع قمة الصخرة فوجد أن قياسها  $35^\circ$  وبعد ثلثين ومن نفس القارب ثم رصدت زاوية الارتفاع مرة أخرى فوجد أن قياسها  $60^\circ$  أحسب ارتفاع الصخرة لأقرب متر. [١٣٠ متر]

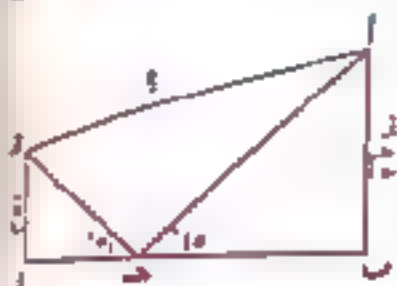


١٧ من قمة منزل إرتفاعه ١٥ مترًا كان قياس زاوية إرتفاع قمة برج ٩٧° ، قياس زاوية إنخفاض قاعدة البرج ٣٥° أوجد إرتفاع البرج لأقرب متر علما بأن قاعدة البرج والمادة المنزل في مستوى أفقى واحد.

١٨ من قمة جبل إرتفاعه ١٠٠ متر فوق سطح البحر رصد شخص زاوية انخفاض قمة صخرة فوجد أن قياسها ٢٧° ٤٢' أوجد إرتفاع الصخرة عن سطح البحر إذا كانت تبعد عن الجبل مسافة ٢٢ مترًا علما بأنهما مقامين على أرض أفقية واحدة.

١٩ رصد قائد طائرة عمودية هدف على الأرض فوجد أن قياس زاوية انخفاضه في لحظة ما ٣٠° ولما هبط قائد الطائرة رأسًا مسافة ٢ كيلو متر وجد أن قياس زاوية انخفاض الهدف أصبحت ٢٠° أوجد إرتفاع الطائرة عن سطح الأرض لحظة الرصد الأولى للهدف.

٢٠ في الشكل المقابل ،



(١٠٠ متر)

بالتوان ١ و إرتفاعهما ١٠٠ م ، ٢٠ م مترًا  
رصد جسم على الأرض (حد) يقع في المستوى  
الرأسى المار بالبالونين فإذا كان قياسا زاويتي  
إنخفاض الجسم ٤٥° ، ٣٠° على الترتيب  
أوجد البعد بين البالونين مقربا لأقرب متر.

٢١ المسافة الأفقية بين برجين ٥٠ متر وقياس زاوية انخفاض قمة الأول عندما تشاهد من قمة الثاني ٢٠° فإذا كان إرتفاع البرج الثاني ١٠٠ متر فأوجد إرتفاع البرج الأول (علما بأن البرجين يقعا في مستوى أفقى واحد)

٢٢ من قاعدة منار إرتفاعه ٣٠ متر قيست زاوية إرتفاع قمة مبنى فكانت ٣٨° ومن قمة المنار قيست زاوية إنخفاض قمة المبنى نفسه فكانت ٢٩° أوجد لأقرب متر إرتفاع المبنى (علما بأن القاعدتين المبنى والمنار في مستوى أفقى واحد)

٢٣ من نقطة ما على سطح الأرض وجد أن قياس زاوية إرتفاع قمة شجرة تساوى ٤٠° ومن نقطة أخرى على إرتفاع ٤٥ مترًا من النقطة السابقة وفوقها تماخا وجد أن قياس زاوية إنخفاض قمة الشجرة تساوى ٣٠° أوجد إرتفاع الشجرة لأقرب متر.



من نقطة على سطح أرض أفقية رصد رجل زاوية ارتفاع منطاد يتحرك رأسياً بسرعة ثابتة مقدارها ٢٠ متر/ثانية فوجد أن قياسها يساوي ٣٥° وبعد ثلاث دقائق عيّد الرصد من نفس النقطة فوجد أن قياس زاوية ارتفاع المنطاد أصبح ٦٥°  
أوجد بُعد الرجل عن مسقط المنطاد على الأرض لأقرب متر  
[١٣٩ متر]

من نقطة م على شاطئ نهر رصد رجل موقع منزل عند نقطة ب على الضفة الأخرى للنهر فوجدها في اتجاه ٢٠° شمال الشرق، ولما سار الرجل بمحاذاة الشاطئ في اتجاه الشرق مسافة ٣٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة هـ وجد أن نقطة ب في اتجاه ٤٦° شمال الشرق.  
أوجد عرض النهر لأقرب متر علماً بأن ضفتي النهر متوازيتان وأن النقط م، ب، هـ في مستوى أفقي واحد.  
[٢٦٨ متر]

سفينة تتحرك في اتجاه الشمال الشرقي شوهد منها هدف يقع في جهة الشرق وبعد أن قطعت السفينة ١٢ كم لوحظ أن الهدف أصبح في اتجاه ٣٠° شرق الجنوب  
أوجد بُعد الهدف عن السفينة في تلك اللحظة.  
[٩.٨ كم]

ثلاث مدن م، ب، هـ في مستوى أفقي واحد حيث البعد بين م، ب يساوي ٦٠ كيلومتر  
ب تقع في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٢٥° شمال الشرق من م والبعد بين ب، هـ يساوي ٨٠ كم، هـ تقع في اتجاه يصنع زاوية قياسها ٦٠° شمال الغرب من ب  
أوجد البعد بين المدينتين م، هـ  
[٩٥.٣٣ كم]

ثلاث قرى م، ب، هـ تقع القرية م غرب القرية ب حيث م = ب = ٢٠ كم وتقع القرية هـ في اتجاه ٤٨° شرق الشمال من القرية م، ٦٠° شمال الغرب من القرية ب  
أوجد المسافة بين القريتين ب، هـ لأقرب كيلومتر  
[٦٠ كم]

٢٥ تحركت سفينة من نقطة في اتجاه ٥٠° شرق الجنوب بسرعة ٨ كم/ساعة، في نفس اللحظة ومن نفس النقطة تحركت سفينة أخرى في اتجاه ٦٠° شمال الشرق بسرعة ٤ كم/ساعة  
أوجد المسافة بين السفينتين بعد ساعتين.  
[١٩.٨ كم]

٢٦ تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه ٦٢° جنوب الشرق بسرعة ١١ كيلو متر/ساعة وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة في اتجاه ٦٨° شمال الشرق بسرعة ٦.٥ كيلو متر/ساعة  
أوجد المسافة بين السفينتين بعد مضي ساعتين من لحظة تحركهما معاً.  
[٢٣.٥٣ كم]



٢٧) تحركت سفينة من نقطة معينة في اتجاه  $٢٥^\circ$  غرب الجنوب بسرعة مقدارها  $١٥$  كم / س وفي نفس اللحظة تحركت سفينة أخرى من نفس النقطة في اتجاه  $١٨^\circ ٥٣'$  شمال الغرب بسرعة  $٨$  كم / س أوجد المسافة بين السفينتين بعد  $٣$  ساعات مقرباً لأقرب والمئين عشريين.

٢٨) تسير شخصان من نفس النقطة وفي نفس الوقت الأول في اتجاه  $٤٠^\circ$  غرب الشمال بسرعة  $٣٢$  مترًا / دقيقة والثاني في اتجاه  $٧١^\circ$  جنوب الغرب بسرعة  $٣٨$  متر / دقيقة أوجد لأقرب متر المسافة بينهما بعد  $٥$  دقائق.

٢٩) تسير سفينة بسرعة  $٢٤$  كم / ساعة في اتجاه الجنوب وبعد  $١٠$  ساعات في اتجاه  $٩٥^\circ$  شمال الشرق وبعد ساعة وجد الراكب أن السفينة في اتجاه  $٧٩^\circ$  جنوب غرب نفس الهدف أوجد بعد الهدف عن السفينة عندئذ.

٣٠) رصدت طائرة ص من محطتين A و B عند لحظة مرورها بمستوى الرأس A على المستقيم AB حيث  $AB = ٣٠٠٠$  متر فوجد أن قياس زاوية الارتفاعها من A هو  $٦٩^\circ ٥٣'$  وقياس زاوية ارتفاعها من B هو  $٢٩^\circ ٣٤'$  والمسطح الرأس للطائرة AB أوجد ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض لأقرب متر.

٣١) رصدت سفينة في عرض البحر مارة فوجد أنها تقع على بعد  $٥٠$  كم نحو الشرق ثم تحركت السفينة في اتجاه شمال الشرق وبعد ساعتين وجدت أن المارة أصبحت تقع في اتجاه  $٥٠^\circ$  جنوب الشرق لها أوجد سرعة السفينة.

٣٢) تسير سفينة نحو الشمال الشرقي بسرعة منتظمة مقدارها  $٢٨$  كم / س شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين في اتجاه  $٣٧^\circ$  غرب الشمال وبعد  $٣$  ساعات وجد هذا الراكب أن إحدى هاتين النقطتين أصبحت في اتجاه  $٢١^\circ$  جنوب الغرب بالنسبة له والآخرى في اتجاه  $١٩^\circ$  شمال الغرب بالنسبة له أوجد البعد بين النقطتين لأقرب كيلو متر عندما كان النقطتين والراكب في مستوى أفقي واحد.

٣٣) رصد رجل من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة كل زاوية ارتفاع قمة التل فوجد أن قياسها  $٢١^\circ$  ولا بعد نحو التل مسافة  $٤٠٠$  متر على مستوى يميل على الأفقي بزاوية قياسها  $١٥^\circ$  وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل  $٣٦^\circ$  أوجد ارتفاع التل لأقرب متر.



٢٢ من نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة قل رصد رجل زاوية ارتفاع قمة لتل فوجد أن قياسها  $27^\circ$  ولما صعد نحو لتل مسافة ٢٠٠ متر على طريق يميل على الأفقي بزاوية قياسها  $14^\circ$  وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة التل  $38^\circ$  أوجد ارتفاع التل لأقرب متر [١٩١ متر]

### مسائل تقبس مسنويات عليا من التفكير

٢٣ من قمة برج ارتفاعه ٥٠ مترًا قاس شخص زاوية انخماض هدف ما هو جدها  $75^\circ$  ثم قاس زاوية انخماض نفس الهدف من قمة منزل ارتفاعه ١٢ متر فكانت  $25^\circ$  فإذا كان الهدف يقع على الخط الأفقي المار بين قاصتي البرج والمنزل فأوجد المسافة بين قمتي البرج والمنزل وأيضا المسافة بين قاعدتيهما. [٣٩,١٣, ١٢, ٥١ متر]

٢٤ سفينة تسير بسرعة منتظمة ١٢ كم / ساعة في اتجاه  $30^\circ$  شرق الشمال شاهد راكب فيها نقطتين ثابتتين في اتجاه الشمال الغربي وبعد ٢ ساعات وجد الراكب أن إحدى النقطتين أصبحت في اتجاه  $35^\circ$  جنوب الغرب والآخرى أصبحت في اتجاه  $15^\circ$  شمال الغرب أوجد البعد بين النقطتين علما بأن النقطتين والراكب في مستوى أفقي واحد [٥١,٠١ متر]

٢٥ شاهد طيار هدفاً وهو على ارتفاع ١٠٠٠ متر عن سطح الأرض فوجد أن قياس زاوية انخماضه  $18^\circ 46'$  وبعد ثلاث دقائق من الطيران على نفس الارتفاع متجهاً نحو الهدف وجد أن قياس زاوية انخماض الهدف أصبحت  $36^\circ 42'$  فما سرعة الطيار بالمترو / دقيقة [٢٧٥,٢٥ متر / ثانية]

٢٦ سفينة تسير بسرعة منتظمة قدرها ٢٥ كم / ساعة في اتجاه  $27^\circ$  شمال الغرب شوهد فيها عند الساعة العاشرة صباحاً قناراً في اتجاه  $20^\circ$  شرق الشمال وعند الساعة الواحدة ظهراً من نفس اليوم وجد أن القنار أصبح في اتجاه الشمال الشرقي أوجد بُعد القنار عن السفينة في تلك اللحظة. [١٧٦,٨٨ كم]

٢٧ يرتكز سلم  $AB$  بطرفه  $A$  على حائط رأسي وبطرفه  $B$  على أرض أفقية بحيث كان السلم يميل على الأفقي بزاوية قياسها  $60^\circ$  فإذا تحرك الطرف  $B$  للسلم مسافة ١,٥ متر بعيداً عن الحائط حتى أصبح السلم يميل على الأفقي بزاوية  $45^\circ$  أوجد طول السلم [١,٧ متر]



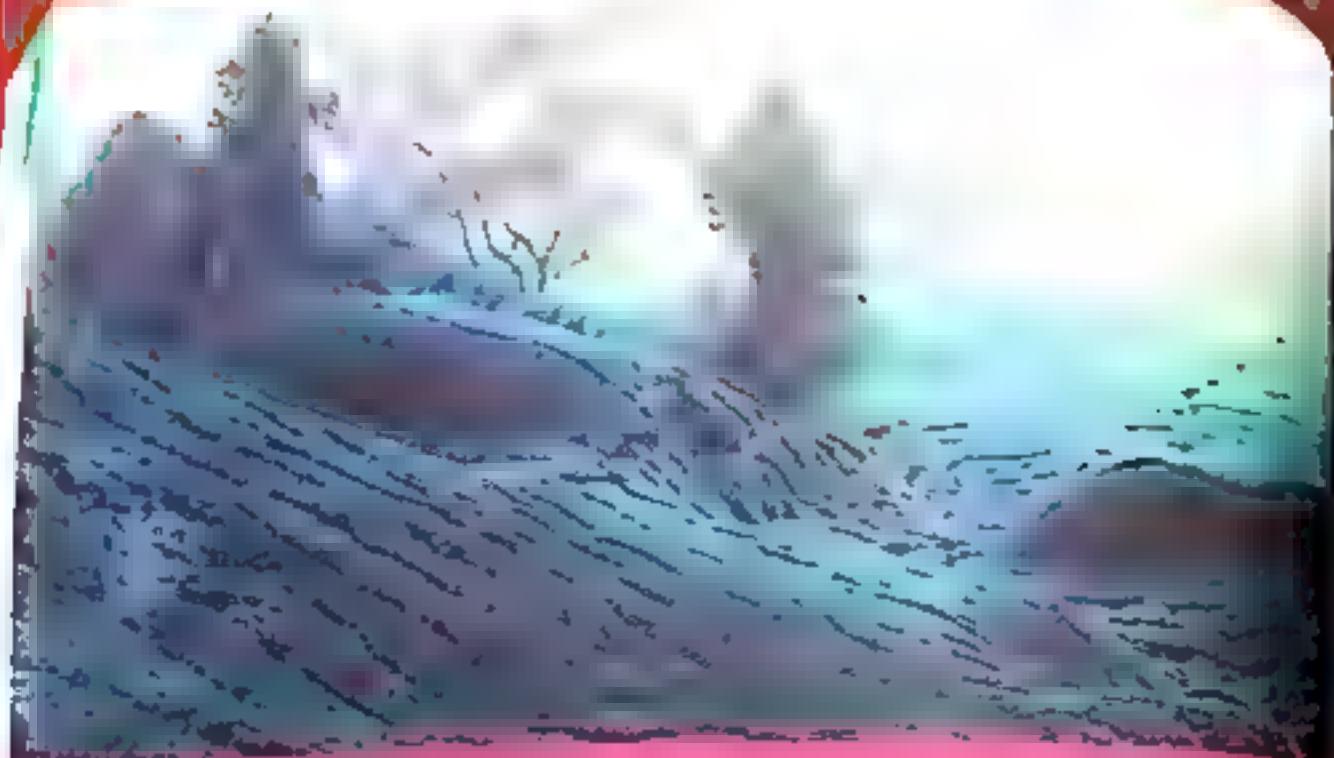
١٢٩ من محطة للرصد رصدت طائرتين ( أ ، ب ) تقعان في مستوى رأس واحد مع محطة الرصد وهي جهة واحدة منها ولهما نفس الارتفاع من محطة الرصد فإذا كان قياس زاويتي الارتفاع الطائرتين هما  $h^\circ$  ،  $y^\circ$  على الترتيب

فأثبت أن ارتفاع الطائرتين =  $\frac{h}{\tan h - \tan y}$  حيث  $h$  المسافة بين ( أ ، ب ) إذا كانت

$h = 100$  متر ،  $h = 35^\circ$  ،  $y = 17^\circ$  فأوجد ارتفاع الطائرتين لأقرب متر

١٠٠ متر





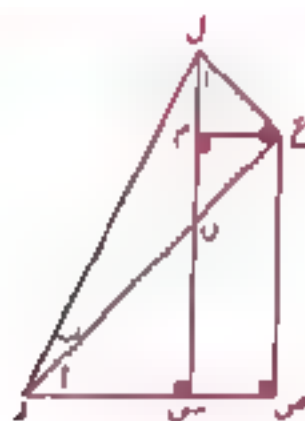
## الدوال المثلثية لمجموع ومفرق قياسي زاويتين

التمرين

٢

قريباً نلاحظ أن

قريباً نلاحظ أن



(لاحظ أن، ع = م = س)

$$\text{ن (١٥)} = \text{ل} (\text{د ع ل م})$$

$$\text{ها (١٦)} = \frac{\text{ل س}}{\text{ل د}} = \frac{\text{ل س}}{\text{ل د}} + \frac{\text{م س}}{\text{ل د}} = \frac{\text{ل س}}{\text{ل د}} + \frac{\text{م س}}{\text{ل د}}$$

$$\frac{\text{ل س}}{\text{ل د}} + \frac{\text{م س}}{\text{ل د}} =$$

$$\frac{\text{ل س}}{\text{ل د}} \times \frac{\text{ل د}}{\text{ل د}} + \frac{\text{م س}}{\text{ل د}} \times \frac{\text{ل د}}{\text{ل د}} =$$

$$\frac{\text{ل س}}{\text{ل د}} \times \frac{\text{ل د}}{\text{ل د}} + \frac{\text{م س}}{\text{ل د}} \times \frac{\text{ل د}}{\text{ل د}} =$$

$$= \text{ها} \times \text{ا} + \text{ها} \times \text{ب}$$

فيكون:  $\text{ها (١٦)} = \text{ها} \times \text{ا} + \text{ها} \times \text{ب}$  (البرهان لا يمتحس فيه الطالب)

ويوضع (- ب) بدلاً من ب منتج أن،

$$\text{ها [(ب-) + ا]} = \text{ها} \times \text{ا} + \text{ها} \times \text{ب (-)}$$





وحيث أن  $\text{ها} = (-\text{ب}) = -\text{ها} \text{ ب}$  ،  $\text{ها} = (-\text{ب}) = \text{ها} \text{ ب}$

فيكون ،  $\text{ها} = (-\text{ب}) = \text{ها} \text{ ب} - \text{ها} \text{ ب}$

وباستخدام نفس الشكل يمكن إثبات أن ،  $\text{ها} = (\text{ب} + 1) = \text{ها} \text{ ب} - \text{ها} \text{ ب}$

ونستنتج أيضاً أن ،  $\text{ها} = (\text{ب} + 1) = \text{ها} \text{ ب} + \text{ها} \text{ ب}$

وحيث أن ،  $\text{طا} = (\text{ب} + 1) = \frac{\text{ها} = (\text{ب} + 1)}{\text{ها} = (\text{ب} + 1)} = \frac{\text{ها} \text{ ب} + \text{ها} \text{ ب}}{\text{ها} \text{ ب} - \text{ها} \text{ ب}}$

ويقسمة كل من البسط والمقام على  $\text{ها} \text{ ب}$  ، يكون ،

$$\text{طا} = (\text{ب} + 1) = \frac{\text{طا} + 1}{\text{طا} - 1} \quad \text{وعند وضع } (-\text{ب}) \text{ بدلاً من } \text{ب} \text{ فإن ،}$$

$$\text{طا} = (\text{ب} - 1) = \frac{\text{طا} - 1}{\text{طا} + 1} \quad \text{حيث } \text{ب} \neq \frac{\pi}{4} (1 + \text{ب}^2) \quad \text{حيث } \text{ب} \in \mathbb{R}$$

### ملاحظة

في أي مثلث  $\text{ب} \text{ هـ}$  :

$\text{ها} = (\text{ب} + 1) = \text{هـ}$  ،  $\text{جا} = (\text{ب} + 1) = -\text{هـ}$  ،  $\text{ها} = (\text{ب} + 1) = -\text{طا} \text{ هـ}$

### مثال

إذا كان  $\text{ب}$  قياس زاويتين وكان  $\frac{\text{ب}}{2} = 1$  حيث  $1 > \frac{\pi}{4}$  ،  $\text{ها} = \text{ب} = \frac{\pi}{4}$

حيث  $\frac{\pi}{4} > \text{ب} > \frac{\pi}{2}$  فأوجد قيمة ،  $\text{ها} = (\text{ب} + 1)$  ،  $\text{ها} = (\text{ب} + 1)$

### الحل

$$\because 1 > \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \text{ها} = 1$$

.. قياس زاوية تقع في الربع الأول

$$\therefore \text{ها} = 1$$





∴ ب تقع في زاوية تقع في الربع الرابع

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{12}{13} = \cos \theta$$

$$\frac{5}{13} = \sin \theta$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

$$\frac{12}{13} \times \frac{3}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{4}{5} =$$

$$\frac{36}{65} - \frac{20}{65} = \frac{16}{65}$$

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{16}{65}$$

$$\frac{12}{13} \times \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \times \frac{3}{5} =$$

$$\frac{48}{65} - \frac{15}{65} = \frac{33}{65}$$



مثال

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{4}$  ما  $\cos(\theta + \phi)$  حيث  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$

وكان  $\phi = \frac{\pi}{6}$  ما  $\sin(\theta - \phi)$  حيث  $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$

فلوجد قيمة كل من  $\cos(\theta + \phi)$  و  $\sin(\theta - \phi)$

الحل

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ما } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ما } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{6} \text{ ما } \cos \phi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

∴ تقع في الربع الثالث

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ ما } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} < \phi < \frac{\pi}{2}$$

∴ تقع في الربع الرابع

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$





$$\frac{74-}{y} = \text{طا } ب ، \frac{74-}{y_0} = \text{طا } ب$$

$$\therefore \text{طا } (ب + 1) = \text{طا } ب + \text{طا } 1$$

$$\frac{7}{8} = \frac{70}{120} = \frac{96}{120} + \frac{74-}{120} = \left(\frac{74-}{y_0}\right) \times \left(\frac{4}{8}\right) + \frac{7}{y_0} \times \frac{7-}{8} = \text{طا } (ب + 1)$$

$$\left(\frac{74-}{y_0}\right) \times \left(\frac{7-}{8}\right) - \frac{7}{y_0} \times \frac{4-}{8} = \text{طا } ب - \text{طا } 1 = \text{طا } (ب + 1)$$

$$\frac{4-}{8} = \frac{74-}{120} = \frac{72}{120} - \frac{74-}{120}$$

$$\therefore \text{طا } (ب + 1) = \frac{72}{120}$$

$$\frac{117-}{44} = \frac{117}{78} = \frac{\left(\frac{74-}{y}\right) - \frac{7}{4}}{\left(\frac{74-}{y}\right) \times \frac{7}{4} + 1} = \frac{\text{طا } ب - 1}{\text{طا } ب + 1}$$

مثال

أوجد ، طا (ب + 1) ، طا ب  
ب م مثلث فيه  $\frac{4}{8} = 1$  ،  $\frac{7}{y} = 1$  ،  $\frac{74-}{y} = 1$

الحل

$\therefore$  طا (ب + 1) ، طا ب موجبتان

$\therefore$  ب تقعان في الربع الأول



$$\frac{7}{y} = 1 \Rightarrow \text{طا } ب = 1$$

$$\therefore \text{طا } (ب + 1) = \text{طا } ب + \text{طا } 1$$

$$\frac{13-}{80} = \frac{40}{80} - \frac{72}{80} = \frac{40}{80} \times \frac{7}{8} - \frac{7}{17} \times \frac{4}{8} = \text{طا } (ب + 1)$$

$$\text{طا } ب = \text{طا } [(ب + 1) - 1]$$

$$\frac{13-}{80} = \left(\frac{13-}{80}\right) - = \text{طا } (ب + 1)$$



### مثال ٤

يبدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

١ ما  $^{\circ}20 + ^{\circ}40 + ^{\circ}60 + ^{\circ}80$  ما  $^{\circ}10$

٢ ما  $^{\circ}22'30 + ^{\circ}7'30 + ^{\circ}22'30 + ^{\circ}7'30$  ما  $^{\circ}40$

٣ ما  $\frac{\pi}{8}$  ما  $\frac{\pi}{4}$  ما  $\frac{\pi}{8}$  ما  $\frac{\pi}{8}$

٤ ما  $^{\circ}35 + ^{\circ}10 - ^{\circ}55$  ما  $^{\circ}80$

### الحل

١ المقدار = ما  $(^{\circ}20 + ^{\circ}40) = ^{\circ}60$  ما  $^{\circ}20 - \frac{1}{4}$

٢ المقدار = ما  $(^{\circ}22'30 + ^{\circ}7'30) = ^{\circ}30$  ما  $\frac{\sqrt{3}}{4}$

٣ المقدار = ما  $(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}) = \frac{\pi}{4}$  ما  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

٤ المقدار = ما  $^{\circ}35 + ^{\circ}10 - ^{\circ}55 = ^{\circ}30$  ما  $^{\circ}35$

= ما  $(^{\circ}10 + ^{\circ}35) = ^{\circ}45$  ما  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ملاحظة  
 $^{\circ}20 = \frac{180}{9} = \frac{\pi}{9}$

### مثال ٥

يبدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة كل مما يأتي :

١ ما  $^{\circ}15$

٢ ما  $^{\circ}75$

٣ ما  $^{\circ}105$

### الحل

نحول للزاوية إلى طرح أو مجموعة زاويتين

١ ما  $^{\circ}15 = (^{\circ}45 - ^{\circ}30)$  ما  $^{\circ}10$  ما  $^{\circ}45$  ما  $^{\circ}60$  ما  $^{\circ}45$

$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{4} =$

لاحظ أنه يمكن تحويل  $^{\circ}15$  إلى  $(^{\circ}30 - ^{\circ}45)$  ونحل بنفس الطريقة



**■ مینا مرزا جی، - مینا عیسیٰ جی**

$$({}^0 10 + {}^0 9_1) \cup_b = {}^0 9_{10} \cup_b \textcircled{4}$$

$$\sqrt{y} - y = \frac{\sqrt{y} + y}{y} = \frac{1 + \sqrt{y}}{\sqrt{y} + y} =$$

أوجد قيمة  $\sin \theta$  المحصورة بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$  والتي تحقق المعادلة:

$\frac{1}{y} = {}^0\text{F}_0 - \text{H}_A - \text{H}_B - {}^0\text{F}_0$

$$\therefore \text{عنا (س + س)} = \text{عنا س فنا س} - \text{عنا س س عا س}$$

∴ الطرف الأيمن =  $(s + 25) \times \frac{1}{4}$

∴ الزاوية تقف في الربع الأول أو الرابع (موجب)

∴ الراوية التي جيب تمامها  $\frac{1}{3}$  قياسها  $90^\circ$  (الربع الأول) أو  $300^\circ$  (الربع الرابع)

$$\theta_{11} = \theta_{22} + \pi \quad \text{و} \quad \theta_{12} = \theta_{21} + \pi$$

س = ۲۵°      او      س = ۲۵°



### مثال ٧

إذا كانت  $\sin \theta = \frac{\pi}{4}$  فما  $\theta$  ما  $\sin \theta = \frac{\pi}{4}$   
 فأوجد قيمة  $\theta$  حيث  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$

### الحل

$$\sin \theta = \left( \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$\therefore \frac{\pi}{4}$  (موجبة)  $\therefore$  الزاوية تقع في الربع الأول أو الثاني

$\therefore$  الزاوية  $\left( \theta + \frac{\pi}{4} \right)$  التي جيبها  $\frac{\pi}{4}$  يكون قياسها  $\frac{\pi}{4}$  إذا كانت تقع في الربع

الأول أو  $\left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$  إذا كانت تقع في الربع الثاني

$$\frac{\pi}{4} = \theta + \frac{\pi}{4} \quad \text{أو} \quad \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \theta \quad \text{أو} \quad \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\theta$$

### مثال ٨

برهن على أن قيمة المقدار:

$\sin (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ - \theta) + \sin (180^\circ + \theta) + \sin (180^\circ - \theta)$   
 لا تتوقف على قيمة  $\theta$

### الحل

$$\therefore \sin (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ - \theta) + \sin (180^\circ + \theta) + \sin (180^\circ - \theta)$$

$$\therefore \text{بوضع } \theta = 90^\circ \Rightarrow \sin (180^\circ) + \sin (0^\circ) + \sin (270^\circ) + \sin (90^\circ)$$

$$\therefore \text{المقدار} = \sin (90^\circ + \theta) + \sin (90^\circ - \theta) + \sin (180^\circ + \theta) + \sin (180^\circ - \theta)$$

$\therefore$  المقدار لا يتوقف على قيمة  $\theta$



### مثال ١

يسون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

$$\textcircled{1} \quad ٦٧^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} = ٦٧^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} + ٦٠^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} = ٦٠^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} + ٦٧^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} = ٩٠^\circ \text{ متا}$$

### الحل

$$\textcircled{1} \quad \text{الطرف الأيسر} = ٦٧^\circ \text{ متا} + (٦٠^\circ + ٣٠^\circ) \text{ متا}$$

$$= ٦٧^\circ \text{ متا} + ٦٠^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} + ٦٧^\circ \text{ متا} + ٣٧^\circ \text{ متا}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا} + \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا} + \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا} + \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا}$$

$$= ٦٧^\circ \text{ متا} = \text{الطرف الأيسر}$$

لاحظ أن

$$٦٠^\circ \text{ متا} = ٩٠^\circ \text{ متا}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{الطرف الأيسر} = \frac{٨٠^\circ \text{ متا}}{٩٠^\circ \text{ متا}} = \frac{(٦٠^\circ + ٢٠^\circ) \text{ متا}}{(٣٠^\circ + ٦٠^\circ) \text{ متا}}$$

$$= \frac{٨٠^\circ \text{ متا}}{٨٠^\circ \text{ متا}} = ١ = \text{الطرف الأيسر}$$

### مثال ٢

$$\text{أثبت أن: } ٣٠^\circ \text{ متا} + (١^\circ + ٣٠^\circ) \text{ متا} = (١^\circ - ٩٠^\circ) \text{ متا}$$

### الحل

$$\text{الطرف الأيسر} = ٣٠^\circ \text{ متا} + ١^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} + ١^\circ \text{ متا} + ٣٠^\circ \text{ متا} - ٩٠^\circ \text{ متا}$$

$$= \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا} + \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا} + \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا} + \frac{١}{٤} \text{ متا} + \frac{٣}{٤} \text{ متا} - ٩٠^\circ \text{ متا}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = (١^\circ - ٩٠^\circ) \text{ متا}$$

الطرفان متساويان.



### مثال ١٠

أثبت أن:  $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$

### الحل

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

### مثال ١١

إذا كان  $\angle A = 30^\circ$ ،  $\angle B = 45^\circ$ ،  $a = 10$ ، فاحسب  $b$  و  $c$  و  $\angle C$ .

### الحل

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{10} = \frac{\sin 45^\circ}{b}$$

$$\frac{1}{20} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{b} \Rightarrow b = 10\sqrt{2}$$

$$\angle C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

### مثال ١٢

يكون استخدام الآلة الحاسبة. أثبت أن:  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

### الحل

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$



### مثال ١٤

- إذا كانت شدة التيار الكهربى  $T$  تعطى بالعلاقة  $T = \frac{3}{4}$  عند  $U = 285$  و
- أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام فرق قياسى زاويتين.
  - أوجد شدة التيار الكهربى بعد ثلثية واحدة (دون استخدام الحاسبة)

### الحل

$$T = \frac{3}{4} \text{ عند } U = 285 \quad \text{علاقة المعطاة} \quad T = \frac{3}{4} \text{ عند } U = 285 - 360 = 90$$

$$T = \frac{3}{4} \text{ عند } U = 75 \quad \text{بالتعويض من } U = 90$$

$$T = \frac{3}{4} \text{ عند } (U = 30 + U = 45) \quad \text{بالتعويض من } U = 90$$

$$T = \frac{3}{4} \text{ عند } (U = 30 + U = 45) \quad \text{بالتعويض من } U = 90$$

$$T = \frac{3}{4} \text{ عند } (U = 30 + U = 45) \quad \text{بالتعويض من } U = 90$$

$$T = \frac{3}{4} \text{ عند } (U = 30 + U = 45) \quad \text{بالتعويض من } U = 90$$



# مطلوب

السؤال الأول: (١٠ درجات)

السؤال الثاني: (١٠ درجات)

راجع معناه وأذكر نفسك

اختبار تراكمي

الدرجة الثانية



(أ) من قمة منزل يرتفع ٦٠ متراً من سطح الأرض قياست زاويتي إنخفاض نقطتين س، ص على سطح الأرض وفي جهة واحدة من المنزل فكانتا  $46^{\circ}$ ،  $38^{\circ}$  على لترتيب فإذا كانت قاعدة المنزل على نفس الخط الأفقي المار بالنقطتين س، ص فأوجد البعد بين النقطتين.

(ب) من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها  $25^{\circ}$  ثم سار الراصد في خط مستقيم مسافة ٥٧ متراً في المستوى الأفقي نحو قاعدة البرج فوجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج  $54^{\circ}$ ، أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر.

(ج) من قمة منزل ارتفاعه ٨ أمتار عن سطح الأرض مكان قياس زاوية ارتفاع قمة شجرة  $18^{\circ}$  وقياس زاوية انخفاض قاعدتها  $29^{\circ}$  أوجد ارتفاع الشجرة وبعداها عن المبنى.







اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

$$\textcircled{1} \text{ ما } \frac{\pi}{4} \text{ متا } \frac{\pi}{18} + \text{متا } \frac{\pi}{9} \text{ ما } \frac{\pi}{18} = \dots\dots\dots$$

$$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } 2 \text{ د } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ د } \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$\textcircled{2} \text{ ما } 75^\circ \text{ متا } 90^\circ + \text{متا } 75^\circ \text{ ما } 90^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\left[ \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ د } 1 \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{\sqrt{2}}{4} \right]$$

$$\textcircled{3} \text{ ما } 5 \text{ س } 3 \text{ ما } 3 \text{ س } + \text{متا } 5 \text{ س } 3 \text{ ما } 3 \text{ س } = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{متا } 2 \text{ س } 8 \text{ د } \text{متا } 8 \text{ س } 8 \text{ د } \text{متا } 8 \text{ س } 2 \text{ د } \text{متا } 2 \text{ س } ]$$

$$\textcircled{4} \text{ إذا كان ما } 2 \text{ س } 2 \text{ متا } 90^\circ - \text{متا } 2 \text{ س } 2 \text{ ما } 90^\circ = \frac{1}{4} \text{ فإن } (5 \text{ س}) = \dots\dots\dots$$

$$[ 80^\circ \text{ د } 90^\circ \text{ د } 30^\circ \text{ د } 80^\circ ]$$

$$\textcircled{5} \text{ متا } \left( \frac{\pi}{4} + \theta \right) = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{ما } \theta \text{ د } - \text{ما } \theta \text{ د } \text{متا } \theta \text{ د } - \text{متا } \theta ]$$

$$\textcircled{6} \text{ ما } \left( \frac{\pi}{4} + \theta \right) = \dots\dots\dots$$

$$\left[ \frac{1}{4} (\text{متا } \sqrt{2} + \theta \text{ ما } \theta) \text{ د } \frac{1}{4} (\text{متا } \theta + \theta \text{ ما } \theta) \text{ د } \right]$$

$$\left[ \frac{1}{4} (\theta \text{ ما } \sqrt{2} + \theta \text{ متا } \sqrt{2}) \text{ د } \frac{1}{4} (\theta \text{ ما } \theta + \theta \text{ متا } \theta) \right]$$

$$\textcircled{7} \text{ ما } (b+1) + \text{ما } (b-1) = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{ما } 1 \text{ متا } 1 \text{ د } \text{متا } 1 \text{ ما } 1 \text{ د } 2 \text{ ما } 1 \text{ ما } 1 \text{ د } 2 \text{ متا } 1 \text{ ما } 1 ]$$

$$\textcircled{8} \text{ متا } (5 \text{ س } - \text{متا } 5 \text{ س } - \text{طا } 5 \text{ س } 5 \text{ س}) = \dots\dots\dots$$

$$\left[ 4 \text{ ما } \frac{5}{4} \text{ د } \text{متا } 2 \text{ س } 5 \text{ د } - \text{متا } 5 \text{ د } \text{ما } 2 \text{ س } \right]$$

$$\textcircled{9} \text{ قبة } \frac{1 + \text{طا } 5}{5 - \text{طا } 5} = \dots\dots\dots$$

$$[ 1 - \text{طا } (5^\circ + 5 \text{ س}) \text{ د } \text{طا } (5^\circ - 5 \text{ س}) \text{ د } \text{طا } (5^\circ - 5 \text{ س}) ]$$

$$\textcircled{10} \text{ متا } 70^\circ \text{ متا } 40^\circ + \text{متا } 70^\circ \text{ متا } 50^\circ = \dots\dots\dots$$

$$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ د } \frac{1}{4} - \text{د } \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ د } \frac{1}{4} \right]$$

$$\textcircled{11} \text{ ما } 55^\circ \text{ متا } 35^\circ + \text{ما } 35^\circ 55^\circ = \dots\dots\dots [ \text{صفر د } \frac{1}{4} \text{ د } 1 - \text{د } 1 ]$$







١٠٠ إذا كان  $\alpha = 1$  ،  $\beta = 2$  ، فأوجد .

(١)  $\alpha + 1$  ،  $\beta + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  ،  $\beta - 1$

١٠١ إذا كان  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  ، فأوجد .

١٠٢ فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة  $\alpha + 1$  .

١٠٣ إذا كان  $\alpha$  ،  $\beta$  زاويتان حادتان حيث  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  ، فأوجد .

برهن أن  $\alpha + \beta = 180^\circ$

### مسائل المسوحات

١٠٤ إذا كان  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  حيث  $\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{8}$  ، فأوجد قيمة  $\alpha + 1$  ،  $\beta + 1$  .

(١)  $\alpha + 1$  ،  $\beta + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  ،  $\beta - 1$

١٠٥ إذا كان  $\alpha$  ،  $\beta$  زاويتين حادتين حيث  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

(١)  $\alpha + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  (٣)  $\beta + 1$  (٤)  $\beta - 1$

(١)  $\alpha + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  (٣)  $\beta + 1$  (٤)  $\beta - 1$

١٠٦ إذا كان  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  ،  $\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{8}$  ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

(١)  $\alpha + 1$  ،  $\beta + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  ،  $\beta - 1$

١٠٧ إذا كان  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  ،  $\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{8}$  ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

(١)  $\alpha + 1$  ،  $\beta + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  ،  $\beta - 1$

١٠٨ إذا كان  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  ،  $\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{8}$  ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

(١)  $\alpha + 1$  ،  $\beta + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  ،  $\beta - 1$

١٠٩ إذا علمت أن  $\alpha = 1$  ،  $\beta = \frac{1}{2}$  ،  $\frac{\pi}{4} > \alpha > \frac{\pi}{8}$  ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من :

(١)  $\alpha + 1$  ،  $\beta + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  ،  $\beta - 1$

(١)  $\alpha + 1$  (٢)  $\alpha - 1$  (٣)  $\beta + 1$  (٤)  $\beta - 1$



14) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة  
 $\left[ \frac{17}{18} - \frac{17}{18} \right]$   
 1) ما (ب + 1) هنا ؟  
 2) هنا ؟

15) إذا كانت  $1^2 = \frac{16}{9}$  حيث  $1 \leq 180^\circ$ ،  $2^2 = 270^\circ$ ،  $3^2 = 180^\circ$  حيث  $3 \leq 180^\circ$ ،  
 $\left[ \frac{17}{18} - \frac{17}{18} \right]$   
 فأوجد قيمة ما (ب - 1) هنا ، ما (ب + 1) هنا ؟

16) إذا كان ما 1 = 6، حيث أكبر قياس موجب، 13 هنا ب + 12، حيث أصغر  
 $\left[ \frac{17}{18} - \frac{17}{18} \right]$   
 قياس موجب فأوجد قيمة ما (ب - 1) هنا ، ما (ب + 1) هنا ؟

17) في المثلث أ ب ه إذا كان ط  $\frac{3}{4} = 13$ ،  $\frac{3}{4} = 5 - 5$ ، فأوجد قيمة ما ه  $\left[ \frac{17}{18} \right]$   
 2) أ ب ه مثلث حاد الزوايا فيه هنا  $\frac{1}{3} = 1$ ، هنا ب  $\frac{1}{4} = 1$   
 أوجد هنا (ب + 1) هنا ؟  
 $\left[ \frac{17}{18} - \frac{17}{18} \right]$

18) اختر الزاوية الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

1) هنا  $19^\circ 36'$  هنا  $4^\circ 44'$  - هنا  $19^\circ 36'$  هنا  $4^\circ 44'$  = .....

[ ما  $90^\circ$  ك هنا  $90^\circ$  ك ه صغر ك هنا  $9^\circ 17'$  ]

2) هنا  $\frac{\pi}{3}$  هنا  $\frac{\pi}{3}$  هنا  $\frac{\pi}{3}$  هنا  $\frac{\pi}{3}$  = .....

[ هنا  $\pi$  ك هنا  $\pi$  ك هنا  $\pi$  ك هنا  $\pi$  ]

3) هنا  $\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$  هنا  $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$  هنا  $\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$  هنا  $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$  = .....

[ هنا  $\pi$  ك هنا  $\frac{\pi}{4}$  ك هنا  $\frac{\pi}{4}$  ك هنا  $\pi$  ]

4) هنا  $75^\circ$  هنا  $15^\circ$  هنا  $75^\circ$  هنا  $15^\circ$  = .....

[ هنا  $90^\circ$  ك هنا  $90^\circ$  ك هنا  $30^\circ$  ك هنا  $90^\circ$  ط ]

5) هنا  $120^\circ$  هنا  $60^\circ$  هنا  $120^\circ$  هنا  $60^\circ$  = .....

[ هنا  $180^\circ$  ك هنا  $180^\circ$  ك هنا  $180^\circ$  ك هنا  $180^\circ$  - ]

6) هنا  $40^\circ$  هنا  $70^\circ$  هنا  $40^\circ$  هنا  $70^\circ$  = .....

[ هنا  $30^\circ$  ك هنا  $30^\circ$  ك هنا  $30^\circ$  ك هنا  $30^\circ$  - ]



$$= \frac{\frac{\pi}{12} ط + \frac{\pi}{6} ط}{\frac{\pi}{12} ط - \frac{\pi}{6} ط - 1}$$

$$\left[ \frac{\pi}{6} ط \quad \frac{\pi}{6} ط \quad \frac{\pi}{2} ط - \quad \frac{\pi}{2} ط \right]$$

$$= \frac{١٥ ط + ٣٠ ط}{١٥ ط - ٣٠ ط - 1}$$

$$[١٥ ط \quad ١٥ ط - \quad ٤٥ ط \quad ٧٥ ط]$$

$$\textcircled{1} \text{ هنا } (٣٥ -) \text{ ما } - (٣٠.٥ -) \text{ ما } - (٣٥ -) \text{ ما } ٥٥ = \dots\dots\dots$$

$$[٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٨٠ \text{ ما}]$$

$$\dots\dots\dots = ٢٥^٢ \text{ ما } + ٢٥ \text{ ما } ٢٥$$

$$[٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٩٠ \text{ ما } \quad ٤٠ \text{ ما}]$$

$$\textcircled{2} \text{ إذا كان ط } ٥ = \frac{1}{4} \text{ فان ط } \left( ٥ + \frac{\pi}{4} \right) = \dots\dots\dots [١ \quad ٢ \quad ٣ \quad ٤]$$

أوجد قيم من المحصورة بين ٣٦٠° و ٣٩٠° والتي تحقق المعادلة:

$$\textcircled{1} \text{ ما من هنا } ٤٠ - \text{ هنا من ما } ٤٠ = \frac{1}{4} \quad [٣٦٠ \quad ٣٩٠]$$

$$\textcircled{2} \text{ هنا } ٣ \text{ من هنا } ٢ \text{ من ما } ٢ \text{ من ما } ٣ \text{ من ما } ٢ \text{ من ما } ٣ = \frac{3}{4} \quad [٣٦٠ \quad ٣٩٠]$$

$$\textcircled{3} \text{ هنا } ٥٢ \text{ هنا } ٨ - \text{ ما } ٥٢ \text{ ما } ٨ = \text{ ما من } \quad [٣٦٠ \quad ٣٩٠]$$

$$\textcircled{4} \text{ ط - ط } ٢٢ \quad ١٥ = 1 - \text{ ط } ٢٢ \text{ من ط } ٢٢ \quad ١٥ \quad [٣٦٧ \quad ٣٩٧]$$

برهن بحسب أرقام التقادير التالية لا تتوقف على من :

$$\textcircled{1} \text{ هنا } (٧٥ + \text{س}) \text{ هنا } (٤٥ + \text{س}) + \text{ ما } (٧٥ + \text{س}) \text{ ما } (٤٥ + \text{س})$$

$$\textcircled{2} \frac{\text{ط } (٨٥ \quad ١٧ + \text{س}) - \text{ ط } (٤٠ \quad ١٧ + \text{س})}{\text{ط } (٨٥ \quad ١٧ + \text{س}) + \text{ ط } (٤٠ \quad ١٧ + \text{س})}$$

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

$$\textcircled{1} \text{ ما } ٥٠ = \text{ هنا } ٨٠ + \text{ هنا } ٢٠ \quad \textcircled{2} \text{ ما } ٢٦ = \text{ هنا } ٥٦ + \text{ هنا } ٤$$

$$\textcircled{3} \text{ هنا } ٢٥ = \text{ ما } ١٢٥ - \text{ ما } ٥ \quad \textcircled{4} \text{ ط } ٨٠ - \text{ ط } ٢٥ - \text{ ط } ٨٠ = ١ - \text{ ط } ٣٥$$

$$\textcircled{5} \frac{\text{ما } ٢ \text{ من هنا } ٢ \text{ من } - \text{ هنا } ٢ \text{ من ما } ٢ \text{ من } \text{ط } ٢ \text{ من}}{\text{ هنا } ٣ \text{ من هنا } ٢ \text{ من } + \text{ ما } ٣ \text{ من ما } ٢ \text{ من}}$$



١٦١ بدور استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{4} &= 0.75 \\ \textcircled{2} \quad \sqrt{2}+2 &= 0.75 \\ \textcircled{3} \quad \frac{0.5\pi+1}{0.5\pi-1} &= 0.5\pi \\ \textcircled{4} \quad \frac{\text{متا} - 1}{\text{متا} + 1} &= (1 - 0.45) \\ \textcircled{5} \quad \frac{\text{متا} + (1-b)}{\text{متا} + (1+b)} &= \frac{(b-1)\text{متا} + (b+1)}{(b-1)\text{متا} + (b+1)} \\ \textcircled{6} \quad \text{متا} &= (1-0.30) + (1-0.60)\text{متا} \\ \textcircled{7} \quad \text{متا} &= (1-0.30) + (1-0.60)\text{متا} \\ \textcircled{8} \quad \frac{1}{4} &= \frac{\pi}{44}\text{متا} + \frac{\pi}{44}\text{متا} \\ \textcircled{9} \quad \sqrt{2}\text{متا} &= 0.5\text{متا} + 0.5\text{متا} \end{aligned}$$

١٦٢ أختصر لأبسط صورة : متا (ب+1) متا + 1 متا (ب+1) متا + 1

١٦٣ بدور استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{\sqrt{2}}{4} &= (0.60 + \text{متا}) - (0.60 + \text{متا}) \\ \textcircled{2} \quad \text{متا} &= (0.60 + \text{متا}) - (0.60 - \text{متا}) \\ \textcircled{3} \quad \frac{4\pi\text{متا}}{\pi^2\text{متا} - 1} &= (0.45 - \text{متا}) + (0.45 - \text{متا}) \\ \textcircled{4} \quad \text{متا} + \text{متا} &= (0.40 - \text{متا}) + (0.40 + \text{متا}) \end{aligned}$$

١٦٤ إذا كان  $\frac{2}{4} = \text{متا}$  ،  $\frac{1}{4} = (\text{متا} - \text{متا})$  حيث  $\text{متا}$  ، من قياسا زاويتين حادتين

أثبت أن :  $\frac{1}{4} = \text{متا}$

١٦٥ إذا كان  $\frac{2}{9} = 1$  حيث  $0 < 1 < 0.9$  ،  $\text{متا} = 7$  حيث  $0.9 < \text{متا} < 1.1$  ، أثبت أن :  $1 + \text{متا} = 0.95$

١٦٦ إذا كان  $\frac{2}{4} = (0.45 + \theta)$  أوجد قيمة  $\theta$

١٦٧ إذا كان  $\frac{1}{4} = 1$  ،  $\frac{1}{8} = \text{متا}$  ،  $\frac{1}{9} = \text{متا}$  حيث  $1 < \text{متا} < 1.1$  ، من قياسات زوايا  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ، أثبت أن :  $1 + \text{متا} + \text{متا} = 0.45$



١٠٩ إذا كان  $\alpha$  ما  $\beta$   $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$ ، حيث  $\beta$ ،  $\alpha$  قياس زاويتان حادتان  
أوجد قيمة  $\sin \alpha$ ،  $\sin \beta$ ،  $\cos \alpha$ ،  $\cos \beta$  [١٠٩]

١١٠ إذا علمت أن  $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$ ، فأثبت أن:  $\alpha = \beta$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  =  $\sin \alpha$  ما  $\beta$  ثم  
أثبت أن:  $\alpha = \beta$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  وإذا علمت أن  $\alpha = \beta$   
أوجد  $\sin \alpha$  ومن ثم أوجد  $\cos \alpha$  [١١٠]

١١١ إذا كان  $\alpha$ ،  $\beta$  قياس زاويتان حادتان حيث  $\alpha = \beta$   
أثبت أن:  $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  =  $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$

١١٢ إذا كان  $\alpha = \beta + \gamma$ ، حيث  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  قياسات زوايا  $\Delta$   
أثبت أن:  $\sin \alpha = \sin \beta + \sin \gamma$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  ما  $\gamma$

١١٣ إذا كان  $\alpha = \beta + \gamma$ ، حيث  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  قياسات زوايا حادة  
فأثبت أن:  $\sin \alpha = \sin \beta + \sin \gamma$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  ما  $\gamma$

١١٤ إذا كان  $\alpha = \beta + \gamma$ ، حيث  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  قياسات زوايا حادة  
فأثبت أن:  $\sin \alpha = \sin \beta + \sin \gamma$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  ما  $\gamma$

١١٥ أثبت أن:  $(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + 4 \sin \alpha \sin \beta$

١١٦ إذا كان  $\alpha = \beta + \gamma$ ، حيث  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  قياسات زوايا حادة  
فأثبت أن:  $\sin \alpha = \sin \beta + \sin \gamma$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  ما  $\gamma$

١١٧ أثبت أن:  $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  =  $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$

١١٨ إذا كان  $\alpha = \beta + \gamma$ ، حيث  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  قياسات زوايا حادة  
فأثبت أن:  $\sin \alpha = \sin \beta + \sin \gamma$  ما  $\alpha$  ما  $\beta$  ما  $\gamma$

١١٩ إذا كانت شدة التيار الكهربائي تعطى بالعلاقة  $I = \frac{E}{R}$  ما  $E$

١٢٠ أعد كتابة العلاقة السابقة باستخدام مجموع قياسات زاويتين.

١٢١ أوجد شدة التيار الكهربائي بعد ثانية واحدة (دون استخدام الحاسبة) [١٢١]



مسائل تقيس مستوياتها من التفكير

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

١) إذا كان  $s$  من  $c$  مثلث

$$\text{فإن } \frac{c}{s} = \left( \frac{s+c}{s} \right) \text{ مثلث } + \frac{c}{s} = \frac{c}{s}$$

[صفر د ١ د ٢ د ٣]

٢) إذا كان  $\frac{a}{b} = \left( \frac{a+b}{b} \right) \text{ مثلث } + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

[صفر د ١ د ٢ د ٣]

٣) إذا كانت  $s \in [\pi, 2\pi]$  فإن قيمة  $s$  التي تجعل قيمة المقدار

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$$

[٧٥ د ٢٧٠ د ٢٨٥ د ٢٩٥]

٤) إذا كانت  $s \in [\pi, 2\pi]$  فإن قيمة  $s$  التي تجعل قيمة المقدار

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$$

[٢٠ د ١٦٠ د ٢٠٠ د ٢٢٠]

٥) إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$ ، فإن  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$

[٥٩ د ٥٩ د ٥٩ د ٥٩]

٦) إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$ ، فإن  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$

[٢ د ٣ د ٣ د ٣]

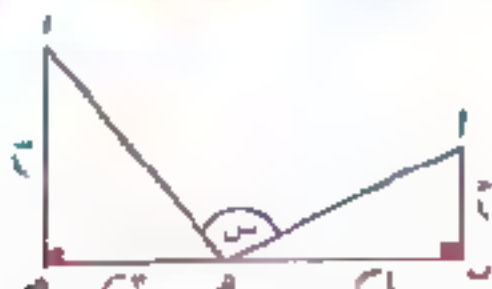
٧) إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$ ، فإن  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$

[١ د ١ د ١ د ١]

٨) إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$ ، فإن  $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} + \frac{a}{b}$

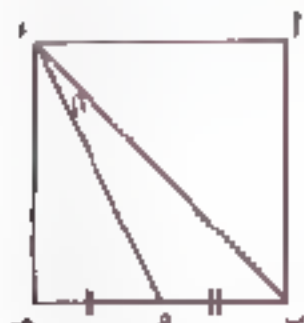
[٥ د ٥ د ٥ د ٥]





١٠ في الشكل المقابل:  
 $\angle 1 = \angle 2$  ،  $\angle 3 = \angle 4$   
 $\angle 5 = \angle 6$  ،  $\angle 7 = \angle 8$   
 فإن ما (د) = .....

$\left[ \frac{511}{25} \text{ د } \frac{512}{25} \text{ د } \frac{519}{25} \text{ د } \frac{526}{25} \right]$



١١ في الشكل المقابل:  
 ا ب هـ مربع  
 ب هـ = هـ د  
 ن (د ب و هـ)  $\theta$   
 فإن ما  $\theta$  = .....

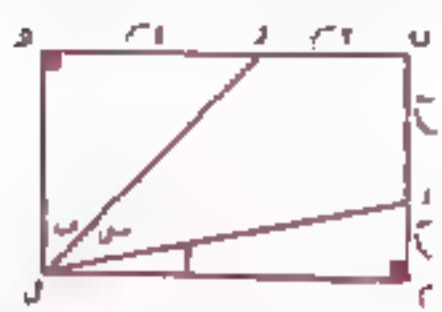
$\left[ \frac{1}{5} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \right]$

١١ إذا كان  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$  فإن  $\tan 45^\circ = \dots$   
 $\left[ \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \text{ د } \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \text{ د } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ د } 1 \right]$



١٢ في الشكل المقابل:  
 ن (د هـ و ب)  $90^\circ$   
 ن (د ا هـ و س)  
 ن (د ا ب و هـ) ، ن (د ا و ع)  
 ما (س + ع) =  $\frac{\pi}{4}$   
 فإن ما س = .....

$\left[ \frac{51}{4} \text{ د } \frac{7}{4} \text{ د } \frac{31}{4} \text{ د } \frac{1}{4} \right]$



١٣ في الشكل المقابل:  
 ل م ن هـ مستطيل ، ن و = ٢ سم ،  
 ر هـ = ٤ سم ، ن و = ٢ سم ، ل م = ١ سم  
 ن (د و ل م) = ١ ، ن (د و ل و) = س ،  
 ن (د و ل هـ) = ب  
 فإن ما س = .....

$\left[ \frac{14}{17} \text{ د } \frac{1}{17} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{17}{14} \right]$



(١٤) في الشكل المقابل:

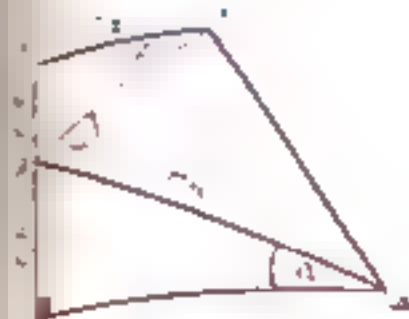
$$11 - 12 = 13, 14 = 15, 16 = 17$$

$$18 = 19, 20 = 21, 22 = 23$$

$$24 = 25, 26 = 27$$

$$28 = 29, 30 = 31$$

فلنحسب



$$\left[ \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{13}{14}, \frac{14}{15}, \frac{15}{16}, \frac{16}{17}, \frac{17}{18}, \frac{18}{19}, \frac{19}{20}, \frac{20}{21}, \frac{21}{22}, \frac{22}{23}, \frac{23}{24}, \frac{24}{25}, \frac{25}{26}, \frac{26}{27}, \frac{27}{28}, \frac{28}{29}, \frac{29}{30}, \frac{30}{31} \right]$$

$$(15) \text{ إذا كان } \frac{1}{3} \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (3 - 1) = 2$$

$$\left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31} \right]$$

$$(16) \text{ إذا كان } 1 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$

$$\left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31} \right]$$

$$(17) \text{ إذا كان } 1, 2, 3 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$

$$\text{فلنحسب } 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31} \right]$$

$$(18) \text{ إذا كان } 1 + 2 + 3 = 6 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$

$$\left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31} \right]$$

$$(19) \text{ إذا كان } 1 + 2 + 3 = 6 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$

$$\left[ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \frac{1}{21}, \frac{1}{22}, \frac{1}{23}, \frac{1}{24}, \frac{1}{25}, \frac{1}{26}, \frac{1}{27}, \frac{1}{28}, \frac{1}{29}, \frac{1}{30}, \frac{1}{31} \right]$$

$$(20) \text{ اختصارها من } 1 + 2 + 3 = 6 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$

$$(21) \text{ إذا كان } 1, 2, 3 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$

فلنوجد قيمة كل من 1, 2, 3

$$(22) \text{ في } \Delta 1, 2, 3 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$

$$(23) \text{ في } \Delta 1, 2, 3 \text{ من } 1 + \text{منها} = 1 \text{ فإن } 1 = (1 - 1) = 0$$



$$\text{مثال ١: } \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{أثبت أن: } (n+1)^2 - n^2 = (n+1) + n = 2n+1$$

$$\text{أثبت أن: } 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{أثبت أن: } \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\text{إذا علم أن } \sin x = \frac{1}{2} \text{، فما قيمة } \cos x = ?$$

$$\text{فأوجد قيمة: } \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{أثبت صحة المتطابقة التالية: } \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{مثال ٢: } \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \text{، فما قيمة } \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$$

$$\text{وكان } \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{، فما قيمة } \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$$





## الدوال المثلثية لتضعف الراوية

الأكريل

٣

### الدوال المثلثية لتضعف الراوية

لنعلم أن

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\therefore \sin(a+a) = \sin a \cos a + \cos a \sin a$$

$$\therefore \sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{لكل } a \in \mathbb{R}$$

بمثل يكون

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{لكل } a \in \mathbb{R}$$

$$2 = \frac{\sin 2a}{\sin a \cos a}$$

$$2 = \frac{\sin 2a}{\sin a \cos a}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a \quad \text{حيث } \sin a \neq 0 \text{، } \cos a \neq 0$$









وسنذكر كيفية إيجاد الحل العام للمعادلة قبله.

- إذا كان حل المعادلة  $\theta = \theta$  في الفترة  $[\pi, 2\pi]$  هو  $\alpha, \beta$   
 فإن الحل العام للمعادلة هو  $\pi + 2 + \alpha = \theta$  أو  $\pi + 2 + \beta$  حيث  $\theta \in \mathbb{R}$   
 مع ملاحظة أنه إذا كانت  $\theta = 0$  يكون الحل العام  $\pi + 2 = \theta$
- إذا كان حل المعادلة  $\theta = \theta$  في الفترة  $[\pi, 2\pi]$  هو  $\alpha - \alpha$   
 فإن الحل العام للمعادلة هو  $\pi + 2 + \alpha \pm \theta = \theta$  حيث  $\theta \in \mathbb{R}$   
 مع ملاحظة أنه إذا كانت  $\theta = 0$  يكون الحل العام  $\pi + 2 + \frac{\pi}{4} = \theta$
- إذا كان حل المعادلة  $\theta = \theta$  في الفترة  $[\pi, 2\pi]$  هو  $\pi + \alpha, \alpha$   
 فإن الحل العام للمعادلة هو  $\pi + 2 + \alpha - \theta = \theta$  حيث  $\theta \in \mathbb{R}$

فمثلاً

بريد الحل العام للمعادلة  $\theta = \frac{1}{4}$  فإننا نلاحظ أن  $\theta$  موجبة

أي أن  $\theta$  تقع في الربع الأول أو الثاني

الزاوية الحادة التي جيبها  $\frac{1}{4}$  قياسها  $30^\circ$

وحيث أن  $\theta$  تقع في الربع الأول أو الثاني فإن  $\theta = 30^\circ$  أو  $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

أي أن  $\frac{\pi}{4} = \theta$  أو  $\pi + \frac{\pi}{4} = \theta$  أي  $(\pi + \frac{\pi}{4})$

نلاحظ أن  $(\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{180} \times 150 = 150^\circ)$

ويكون الحل العام للمعادلة هو:  $\pi + 2 + \frac{\pi}{4}$  أو  $\pi + 2 + \pi + \frac{\pi}{4}$

أي  $\pi + 2 + \pi + \frac{\pi}{4}$







### مثال ٣

إذا كان  $\theta = 1$  حيث  $\frac{\pi}{4} > \theta > 1$ ، مثلاً  $\frac{12}{13} = \sin \theta$  حيث  $\frac{\pi}{4} > \theta > 1$   
 فأوجد قيمة كل من:  $\sin 2\theta$ ،  $\cos 2\theta$ ،  $\tan 2\theta$ ،  $\cot 2\theta$

### الحل

$$\therefore \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \theta = \arcsin \frac{12}{13} \text{ في الربع الأول، حيث } \frac{\pi}{4} > \theta > 1$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\therefore \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{\frac{120}{169}}{-\frac{119}{169}} = -\frac{120}{119}$$

$$\therefore \cot 2\theta = \frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{119}{120}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{120}{169} \text{، } \cos 2\theta = -\frac{119}{169} \text{، } \tan 2\theta = -\frac{120}{119} \text{، } \cot 2\theta = -\frac{119}{120}$$

$$\frac{323}{320} = \frac{5}{13} \times \frac{7}{20} + \frac{12}{13} \times \frac{24}{20} =$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{12}{13} \text{، } \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{12}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\therefore \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = -\frac{119}{169}$$

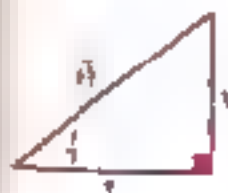
$$\therefore \tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = -\frac{120}{119}$$

$$\therefore \cot 2\theta = \frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{119}{120}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{120}{169} \text{، } \cos 2\theta = -\frac{119}{169} \text{، } \tan 2\theta = -\frac{120}{119} \text{، } \cot 2\theta = -\frac{119}{120}$$

$$\frac{323}{320} = \frac{5}{13} \times \frac{7}{20} + \frac{12}{13} \times \frac{24}{20} =$$

$$\frac{323}{320} = \frac{29}{320} = \frac{5}{320} + \frac{24}{320} =$$









$$\sqrt{37-2} = \frac{\sqrt{37-2}}{3-4} = \frac{37-2}{37-2} \times \frac{37+2}{37+2} =$$

$$\boxed{37-2=95} \text{ ط .}$$

(يمكن استخدام القاعدة التالية مباشرة ط ٩٥ =  $\frac{90}{90+1}$  ما ٣٠)

### مثال

يكون استخدام الآلة الحاسبة البت أن

$$\textcircled{1} \frac{90 \text{ ما } 50 - 90 \text{ ما } 40}{90 \text{ ما } 30 + 90 \text{ ما } 20} = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{2} 2-1 \text{ ما } \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ ما } 1$$

$$\textcircled{3} 1 = \frac{90 \text{ ما } 10}{90 \text{ ما } 20} - 2$$

### الحل

$$\textcircled{1} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{20} \times \frac{1}{2}} = \frac{90 \text{ ما } 30}{90 \text{ ما } 40} = \frac{(90-50) \text{ ما } 40}{90 \text{ ما } 10}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\textcircled{2} \text{الطرف الأيمن} = 2 \text{ ما } \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) = 2 \text{ ما } \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \text{ ما } (2-90) = 2 \text{ ما } 1 = \text{الطرف الأيسر}$$

$$\textcircled{3} \text{الطرف الأيمن} = 2 - 2 = 90 \text{ ما } 10$$

$$= 2 - 2 = 90 \text{ ما } 10 = \text{الطرف الأيسر}$$



## مثال

أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل مما يأتي:

$$1) \text{ ما } ^\circ 75^2 - \text{ ما } ^\circ 75^2$$

$$2) \text{ ما } \frac{\pi}{8} \text{ ما } \frac{\pi}{8}$$

$$3) \frac{^\circ 15 \text{ ط } 2}{^\circ 15^2 \text{ ط } 1}$$

$$4) \text{ ما } \frac{\pi}{6} \text{ ما } \frac{\pi}{6}$$

$$5) \frac{^\circ 112' 30'' \text{ ما } 2 - 1}{^\circ 67' 30'' \text{ ما } ^\circ 67' 30''}$$

## الحل

$$1) \text{ ما } ^\circ 75^2 - \text{ ما } ^\circ 75^2 = \text{ ما } (^\circ 75 \times 2) = \text{ ما } ^\circ 150$$

$$\frac{^\circ 150}{2} = \text{ ما } ^\circ 75 = \text{ ما } (^\circ 180 - ^\circ 110) =$$

$$2) \frac{^\circ 15}{2} = \text{ ما } ^\circ 75 = \left( \frac{\pi}{8} \right) 2 \text{ ما } = \frac{\pi}{8} \text{ ما } \frac{\pi}{8}$$

$$3) \frac{^\circ 15}{2} = \text{ ما } ^\circ 75 = ^\circ 15 \times 2 \text{ ط } 1 = \frac{^\circ 15 \text{ ط } 2}{^\circ 15^2 \text{ ط } 1}$$

$$4) \frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2} - 1 + ^\circ 60 = 1 + \frac{\pi}{2} \times 2 \text{ ما } = \frac{\pi}{2} \text{ ما } \frac{\pi}{2}$$

$$5) \frac{^\circ 112' 30'' \text{ ما } 2}{^\circ 67' 30'' \text{ ما } \frac{1}{2}} = \frac{^\circ 112' 30'' \times 2 \text{ ما } 2}{^\circ 67' 30'' \times 2 \text{ ما } \frac{1}{2}} = \frac{^\circ 112' 30'' \text{ ما } 2 - 1}{^\circ 67' 30'' \text{ ما } ^\circ 67' 30''}$$

$$2 = \frac{\frac{^\circ 150}{2}}{\frac{^\circ 150}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{^\circ 75 \text{ ما } 2}{^\circ 75 \text{ ما } \frac{1}{2}} = \frac{(\text{ما } ^\circ 150 + \text{ما } ^\circ 180)}{(\text{ما } ^\circ 150 - \text{ما } ^\circ 180) \text{ ما } \frac{1}{2}} =$$



## مثال ٧

أكتب صحة المتطابقات الآتية:

١)  $\text{tg} 2^\circ - \text{tg} 1^\circ = \text{tg} 1^\circ$

٢)  $\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ = 1$

٣)  $\text{tg} 2^\circ = \frac{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ - \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ}{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ}$

## الحل

### الخطوة

عند إثبات صحة متطابقتين  
يفصل البدء بالطرف الأكبر  
ويفصل تلك دالة ضعف الزاوية  
بالقوانين

١) الطرف الأيمن =  $\frac{1}{\text{tg} 1^\circ} \sim \frac{\text{tg} 2^\circ}{\text{tg} 1^\circ}$

$$\frac{(1 - \text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ) - 1}{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ} = \frac{\text{tg} 2^\circ - 1}{\text{tg} 1^\circ}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \text{tg} 1^\circ = \frac{\text{tg} 1^\circ}{\text{tg} 1^\circ} = \frac{\text{tg} 2^\circ}{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ}$$

٢) الطرف الأيسر =  $\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ = 1 = \text{الطرف الأيسر}$

٣) الطرف الأيسر =  $\frac{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ - \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ}{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ}$

$$\frac{(1 - \text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ) - 1}{(1 - \text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ) + 1} = \frac{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ - \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ}{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 2^\circ}$$

$$\text{الطرف الأيسر} = \text{tg} 1^\circ = \frac{\text{tg} 2^\circ}{\text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ + \text{tg} 2^\circ \text{tg} 1^\circ}$$



مثال

إذا كان  $1 + 1 = \frac{1}{4}$ ، فكم تكون قيمة  $12$ ؟ أوجد  $1 - 1$ ، فـ  $1$

الحل

بتربيع الطرفين  $\frac{1}{4} = 2(1 - 1)$ ،

$\frac{1}{4} = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 2 = 0$ ،  $\frac{1}{4} = 1 - 1$

$\frac{1}{4} = 1 - 1$ ،  $12 = 1 - 1$ ،  $\frac{1}{4} = 12$

$1 - 1 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - 1}{2}$

$\frac{1}{4} = \frac{\frac{1}{2} \times 2}{\frac{2}{1}} = \frac{(1 - 1) \times 2}{12} =$

مثال

أثبت أن:  $12 = \frac{12}{1} - \frac{12}{1} = 12$

الحل

الطرف الأيمن =  $\frac{12}{1} - \frac{12}{1} = 12$  بتوحيد المقامات

$\frac{12}{1} - \frac{12}{1} = \frac{12 \cdot 1 - 12 \cdot 1}{1 \cdot 1} =$

$\frac{12}{1} - \frac{12}{1} = 12$  الطرف الأيسر =



### مثال (١٠)

أثبت أن:  $\frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} - 1$  إذا وجد قيمة:  $\frac{\pi}{8}$   $\frac{\pi}{8}$

### الحل

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2} - 1$$

$$1 - \sqrt{2} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \right) \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\pi}{8}$$

### مثال (١١)

أثبت أن:  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} - 1$  إذا كان  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$  وكان  $\frac{1}{\sqrt{2}} = 1$

### الحل

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} - 1$$

$$1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1$$

$$1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2} + 1$$







### مثال ١١

أوجد قيم  $\sin$  المحصورة بين  $0$  و  $\pi/2$  والتي تحقق المعادلة:

$$\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

### الحل

$$\therefore \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$0 = (\sin x + 1)(\sin x - 1)$$

$$\text{إما } \sin x = 1 \text{ أو } \sin x = -1$$

$\therefore$  تقع في الربع الأول أو الرابع

$$\therefore \sin x = 1 \text{ (عدد موجب)}$$

$\therefore$  الزاوية الموجبة التي جيب تمامها  $= \frac{1}{2}$  هي  $60^\circ$

$$\therefore \sin x = 1 \text{ (الربع الأول) أو } \sin x = -1 \text{ (الربع الرابع)}$$

$$\therefore \sin x = 1$$

$$\therefore \sin x = -1$$

$\therefore$  قيم  $\sin$  التي تحقق المعادلة هي  $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

### حل آخر

$$\text{نوجد الصورة العامة } \sin x = \pm \frac{1}{2} \text{ أو } \sin x = \pm 1$$

ويضع  $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$  نوجد القيم التي تحقق المعادلة









## مسائل المستوى الأول

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 2 \text{ ما } 15^\circ \text{ ما } 60^\circ & \quad \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad 2 \text{ ما } 22^\circ 30' \text{ ما } 22^\circ 30' \\ \textcircled{2} \quad 2 \text{ ما } 22^\circ 30' 2 - 10^\circ & \quad \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right] \quad 2 \text{ ما } 75^\circ 1' - 75^\circ 1' \\ \textcircled{3} \quad \frac{2 \text{ ما } 60^\circ}{2 \text{ ما } 60^\circ - 1} & \quad \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 11 \end{array} \right] \quad \frac{2 \text{ ما } 22^\circ 30' 2}{2 \text{ ما } 22^\circ 30' 1 - 1} \\ \textcircled{4} \quad \frac{2 \text{ ما } 13^\circ \text{ ما } 27^\circ + 2 \text{ ما } 43^\circ \text{ ما } 27^\circ}{2 \text{ ما } 43^\circ \text{ ما } 27^\circ} & \end{aligned}$$

(٣) إذا كان  $\frac{2}{3} = 1$ ، حيث  $\frac{2}{3} > 1$ ، فأوجد القيمة: ما  $12^\circ$ ، ما  $12^\circ$ ، ما  $12^\circ$   $\left[ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right]$

(٤) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من ما  $2^\circ$ ، ما  $2^\circ$ ، ما  $2^\circ$  إذا كان:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 90^\circ > \theta > 0^\circ & \quad \frac{1}{2} - \theta \\ \textcircled{2} \quad \frac{\pi}{4} > \theta > 0^\circ & \quad \frac{1}{4} = \theta \\ \textcircled{3} \quad \frac{\pi}{4} > \theta > \pi & \quad \frac{\pi}{4} - \theta \\ \textcircled{4} \quad 270^\circ > \theta > 180^\circ & \quad \frac{\pi}{4} = \theta \end{aligned}$$

(٥) أوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة كل من: ما  $2^\circ$ ، ما  $2^\circ$ ، ما  $\frac{\pi}{4}$

ما  $\frac{\theta}{4}$  إذا كان:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad 90^\circ > \theta > 0^\circ & \quad \frac{1}{2} = \theta \\ \textcircled{2} \quad 180^\circ > \theta > 90^\circ & \quad \frac{\pi}{2} = \theta \\ \textcircled{3} \quad \frac{\pi}{4} > \theta > \pi & \quad \frac{\pi}{4} = \theta \\ \textcircled{4} \quad \pi > \theta > \frac{\pi}{4} & \quad \frac{15-\pi}{14} = \theta \end{aligned}$$



أشهر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة،

$$① \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } ٢٠ \text{ ما } ٢٠ = \dots\dots\dots [ \text{ما } ٤٠ \text{ ما } ٤٠ \text{ ما } ٤٠ \text{ ما } ٤٠ ]$$

$$② \text{ ما } ٢٥ \text{ ما } ٢٥ = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{ما } ٧٠ \text{ ما } ٧٠ \text{ ما } ٧٠ \text{ ما } ٧٠ ]$$

$$③ \text{ ما } ٢٥ - \text{ما } ٢٥ = \dots\dots\dots [ \text{ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠ \text{ ما } ٥٠ ]$$

$$④ ٢-١ \text{ ما } ١ = \dots\dots\dots$$

$$[ \text{ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ ]$$

$$⑤ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ٤٠}{\text{ما } ١٠ - ١}$$

$$[ \text{ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ ]$$

$$\dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ٢٢ \text{ ما } ٢٠}{\text{ما } ٢٢ - ١}$$

$$[ \text{ما } ٤٥ \text{ ما } ٤٥ \text{ ما } ٤٥ \text{ ما } ٤٥ ]$$

$$⑦ \text{ ما } ٢٥ \text{ ما } ٢٥ - \text{ما } ٢٥ \text{ ما } ٢٥ = \dots\dots\dots$$

$$[ - \text{ما } ٦٠ \text{ ما } ٦٠ - \text{ما } ٦٠ \text{ ما } ٦٠ ]$$

$$⑧ \text{ ما } ٦٠ \text{ ما } ٦٠ + \text{ما } ٦٠ \text{ ما } ٦٠ = \dots\dots\dots$$

$$[ - \text{ما } ٣٠ \text{ ما } ٣٠ - \text{ما } ٣٠ \text{ ما } ٣٠ ]$$

$$⑨ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ١٠ - \text{ما } ١٠}{\text{ما } ١٠ + ١}$$

$$[ \text{ما } ٩٠ \text{ ما } ٩٠ \text{ ما } ٩٠ \text{ ما } ٩٠ ]$$

$$⑩ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ٩٠ \text{ ما } ٧٠ - ١}{\text{ما } ٩٠ + \text{ما } ٧٠}$$

$$[ \text{ما } ٩٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٩٠ ]$$

$$⑪ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ٨٢ + \text{ما } ٨٢ - ١}{\text{ما } ٨٢ + \text{ما } ٨٢ + ١}$$

$$[ \text{ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ ]$$

$$⑫ \dots\dots\dots = \frac{\text{ما } ٨٠ + \text{ما } ٨٠ - ١}{\text{ما } ٨٠ + \text{ما } ٨٠ + ١}$$

$$[ \text{ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ \text{ ما } ٨٠ ]$$







③ أمتنا هنا 1

$$\left[ \frac{1}{4} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \frac{1}{4} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\left[ \frac{1}{4} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \right] \dots\dots\dots = \frac{1 \text{ ما}}{1 - 1^2 \text{ ما}} \quad \textcircled{2}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{3}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{4}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right] \dots\dots\dots = 1 - 1^2 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{5}$$

$$\dots\dots\dots = 1 - 1^2 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{6}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\dots\dots\dots = 1 - 1^2 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{7}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{8}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right] \dots\dots\dots = \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{9}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right] \dots\dots\dots = \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{10}$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } 12 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{11}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right] \dots\dots\dots = \frac{1 \text{ ما}}{(1 - 1^2 \text{ ما}) (1 - 1^2 \text{ ما})} \quad \textcircled{12}$$

$$\dots\dots\dots = 1 - 1^2 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{13}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$

$$\dots\dots\dots = 1 - 1^2 \text{ ما } 12 \quad \textcircled{14}$$

$$\left[ \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \text{ ك } \frac{1}{2} \text{ ما } 12 \right]$$



11) إذا كان ما  $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$  أوجد كل من ما ١٢، هنا ١٢

12) إذا كان ما  $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$  أوجد كل من ما ١٢، هنا ١٢

13) إذا علمت أن ما  $\frac{5}{13} = 1$  حيث قياس زاوية حادة أوجد بدون استخدام الآلة

الحاسبة قيمة ما ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢

14) إذا كانت ما  $\frac{\pi}{4} > \pi$  حيث  $\frac{3}{5} = 1$  من ٣، من ٣

أوجد قيمة ما ٢، هنا ٢، هنا ٢

15) إذا كانت ما  $\frac{\pi}{4} > \pi$  حيث  $\frac{3}{5} = 1$  من ٣، من ٣

أوجد ١، هنا ٢، هنا ٢

16) إذا كانت ما  $\frac{\pi}{4} > \pi$  حيث  $\frac{3}{5} = 1$  من ٣، من ٣

أوجد قيمة ما ٢، هنا ٢، هنا ٢

17) إذا كان ما  $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$  بدون استخدام الآلة الحاسبة

أوجد قيمة ما ٢، هنا ٢، هنا ٢

18) إذا كان ما  $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$  فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة

قيمة ما ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢

19) إذا كان ما  $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$  فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن

١ = (٢ + ٢) هنا ٢، هنا ٢، هنا ٢

20) إذا كان ما  $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$  فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة

قيمة ما ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢

21) إذا كان ما  $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{5}{13}$  فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة

قيمة ما ١٢، هنا ١٢، هنا ١٢



إذا كانت  $\frac{1}{x} = 1$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، ما  $\frac{1}{x} = 1$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

وأوجد قيمة  $\sin$  في  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ،  $\cos$  في  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ ،  $\tan$  في  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

إذا كان  $\frac{1}{x} = 12$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، فأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

إذا كانت  $\frac{1}{x} = 1$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، ما  $\frac{1}{x} = 1$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

وأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

إذا كانت  $\frac{1}{x} = 1$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، ما  $\frac{1}{x} = 1$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

وأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

إذا كان  $\frac{1}{x} = 12$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، فأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

وأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

إذا كان  $\frac{1}{x} = 12$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، فأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

وأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

بدون استخدام الآلة الحاسبة

إذا كان  $\frac{1}{x} = 12$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، فأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

إذا كان  $\frac{1}{x} = 12$  حيث  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، فأوجد قيمة  $\sin$  و  $\cos$  و  $\tan$  في  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

أثبت صحة المتطابقات الآتية

①  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

②  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

③  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

④  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

⑤  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

⑥  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

⑦  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

⑧  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

⑨  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

⑩  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

⑪  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

⑫  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

⑬  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

⑭  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

⑮  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

⑯  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



$$(11) \quad \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \sin \theta + \cos \theta$$

$$(12) \quad \frac{1 - \sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta} \quad (13) \quad \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta}$$

$$(14) \quad \frac{1 - \theta}{1 + \theta} = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta} \quad \text{ومن ذلك أوجد قيمة: } \frac{1 - \sin 2\theta}{1 + \sin 2\theta} = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$$

$$(15) \quad \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta} \quad (16) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$(17) \quad \frac{1}{2} = \left( \frac{1}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta \right) + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$$

$$(18) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \quad \text{ومن ذلك أوجد قيمة } \sin \theta \text{ بدون استخدام الآلة الحاسبة}$$

$$(19) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \quad (20) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta$$

(21) إذا كان  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، فأوجد بدون استخدام الآلة الحاسبة قيمة  $\cos \theta$  حيث  $\theta$  قياس زاوية حادة موجبة.

(22) إذا كان  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، فأثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$  حيث  $\theta$  قياس زاوية حادة موجبة.

(23) أوجد قيم  $\sin \theta$  والمحصورة بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$  والتي تحقق كل معادلة مما يأتي:

$$(1) \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad (2) \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad \sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \quad (4) \quad 2 - \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 \quad (6) \quad \sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1$$

$$(7) \quad \sin \theta + \sin 2\theta = 2 \quad (8) \quad \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(9) \quad \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1 \quad (10) \quad \sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 1$$

$$(11) \quad \sin \theta - \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

(24) إذا كان  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ، فأوجد بدون استخدام حاسبة الجيب قيمة  $\sin 3\theta + \sin 2\theta + \sin \theta$

(25)



المعادلة الأصلية المتكافئة لـ  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

أثبت أن  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) ومن ذلك استخدم الآلة الحاسبة  
أوجد قيمة  $\theta$

$$\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

أثبت أن  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) ومن ذلك استنتج قيمة  $\theta$

$$\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

استخدم الآلة الحاسبة.

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد قيمة  $\theta$

$$\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )  
ثم أثبت أن:  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

$$\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )  
فأثبت أن:  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

$$\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

$$\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

إذا كان  $\theta = \frac{\pi}{6}$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ ) فوجد  $\theta$  (أو  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ )

$$\left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



مسائل نفيس مستويان عليا من التفكير

١٦) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة .

١) إذا كان منا  $\frac{1+\sqrt{5}}{4} = 0.36$  فإن منا  $0.72 = \dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ د } \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ د } \frac{1-\sqrt{5}}{4} \text{ د } \frac{1+\sqrt{5}}{4} \right]$

٢) إذا كان  $m$  ب د مثلث فيه  $a^2 = 1 + b^2$  فإن منا  $2$  د  $\dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \right]$

٣) إذا كان  $\sin 2 = \frac{2}{5}$  فإن  $\sin 4 = \dots\dots\dots$  حيث  $0 < 2 < \pi$

$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

٤) إذا كان  $\sin 2 = \frac{2}{5}$  و  $\sin 4 = \frac{4}{5}$  فإن  $\sin 6 = \dots\dots\dots$

$\left[ \frac{2}{5} \text{ د } \frac{4}{5} \text{ د } \frac{6}{5} \text{ د } \frac{8}{5} \right]$

٥) إذا كان  $\sin 2 = \frac{1}{2}$  فإن  $\sin 4 = (2 + \sqrt{3})$  د  $\dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1}{2} \text{ د } \frac{3}{4} \text{ د } \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \right]$

٦)  $\frac{1}{1+\sin 2} = \dots\dots\dots$   $\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

٧) إذا كان  $\sin 2 = \frac{1}{2}$  و  $\sin 4 = \frac{4}{5}$  و  $\sin 6 = \frac{6}{5}$  فإن  $\sin 8 = \dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

١٧) إذا كان  $\sin 2 = \frac{1}{2}$  و  $\sin 4 = \frac{4}{5}$  و  $\sin 6 = \frac{6}{5}$  فإن  $\sin 8 = \dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

فاوجد قيمة كل من  $\sin 2$  و  $\sin 4$  و  $\sin 6$

١٨) إذا كان  $\sin 2 = \frac{1}{2}$  و  $\sin 4 = \frac{4}{5}$  و  $\sin 6 = \frac{6}{5}$  فإن  $\sin 8 = \dots\dots\dots$

$\left[ \frac{1}{4} \text{ د } \frac{1}{3} \text{ د } \frac{1}{2} \text{ د } \frac{1}{5} \right]$

فاوجد قيمة كل من  $\sin 2$  و  $\sin 4$  و  $\sin 6$



لنثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  حيث  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$   
 نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

[٢٦]

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

[٢٧]  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

[٢٨]

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

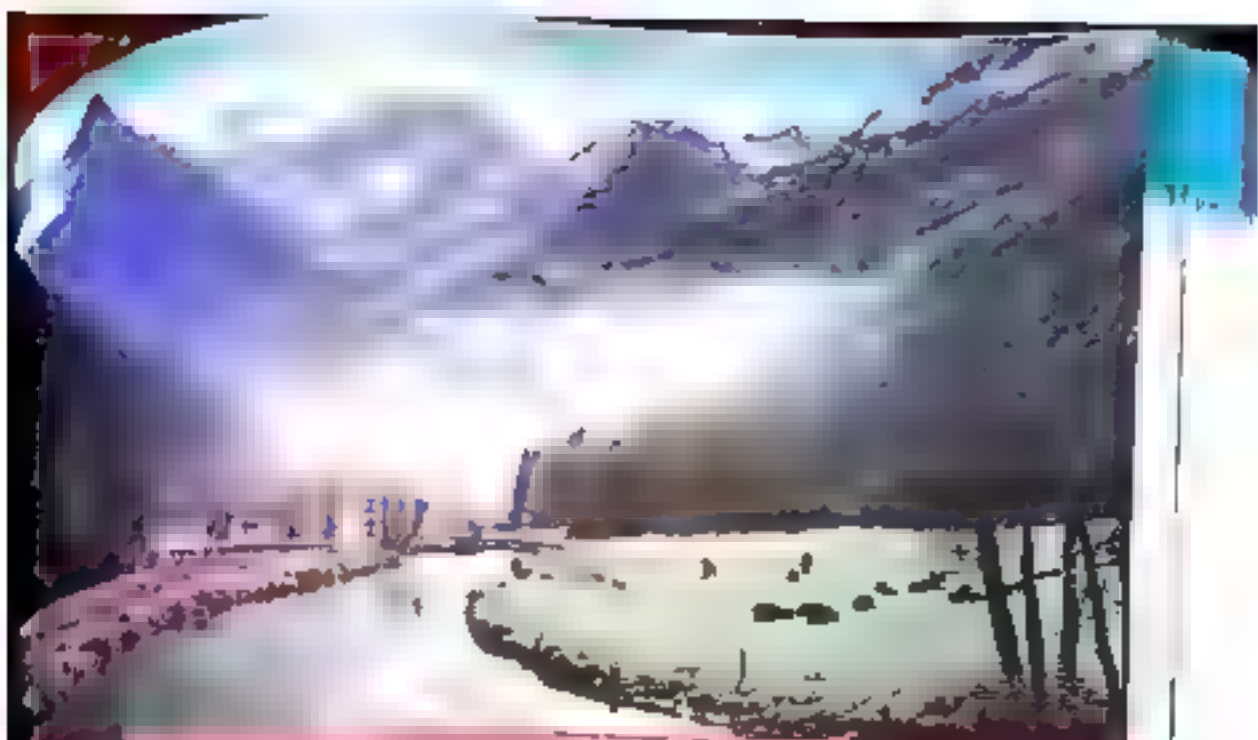
نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

[٢٩]

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)

نثبت ان:  $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$  ما  $\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$  (س ٢ - ٢٦٠)





## صيفة هيرون

المشرف

4

إعداد: مساعدة الأستاذة: الزميلة: بركة اومرية أطول: (أطالفة)

بفرض  $a, b, c$  هي أطوال أضلاع المثلث  $ABC$  حيث:

(حيث  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ ) نصف جميع المثلثات

من قاعدة جيب التمام نعلم أن  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C$

ومن منطقة شينغاورث،  $\alpha = 1 - \sqrt{1 - \alpha^2}$

لاحظ أن:  $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  فيكون  $\langle \cdot \rangle = \langle \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ .

**بالتعویض من ①، ④ فیکوں،**

$$\frac{v_1(v_2 - v_3 + v_4) - v_2 v_3 t}{v_2 v_3 t} \Big|_{t=0} = 1$$

المؤيد المجدد

$$\frac{[(v^2 - w + \frac{1}{2}) - (w' + \frac{1}{2})][(v^2 - w + \frac{1}{2}) + (w' + \frac{1}{2})]}{w' + \frac{1}{2}} = \text{ما}$$

(الحاجي علي بن هاشم)

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{[1-(\frac{v}{c})^2]}}$$

(پیش از این شد از شیخ مصطفی حریری در این باره)





$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

ولكن  $\Delta = (a+b+c) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$   
 بالتعويض من (3) في (4):

$$\Delta = (a+b+c) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

أو أن مساحة سطح المثلث الذي أطوال أضلاعه هي  $a, b, c$  هي

$$\Delta = (a+b+c) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

**ملحظة هامة:** البرهان لا يمتح في الطرب

**النتيجة**

إيجاد طول نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث ونمس جميع أضلاعه

سنطبق أن نستنتج أن

$$\Delta = (a+b+c) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Delta = (a+b+c) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$



$$\Delta = (a+b+c) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$



أشكال ثنائية

- ١ إذا كانت إحدى القيم  $ع$  -  $أ$  أو  $ع$  -  $ب$  أو  $ع$  -  $هـ$  سالبة فإن الكميات السالبة تحت الجذر غير معرفة في  $ع$  وبالتالي لا توجد مساحة للمثلث وإذا كانت إحدى القيم تساوي صفرًا فإنه لا يوجد مثلث من الأساس.
  - ٢ إذا كانت  $ع >$  أحد أطوال أضلاع المثلث فإنه لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته ويمكن استخدام متباينة المثلث للتأكد من ذلك قبل الحل حيث مجموع طولي أي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- فمثلًا، إذا كانت أطوال الأضلاع هي  $١٥$ ،  $٧$ ،  $٩$  من السنتيمترات فليكن:
- $ع = ٢٨$   $م$  سيكون  $ع = ١٤$  حيث أن  $ع >$  طول أحد الأضلاع فإنه لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته وبالمثل إذا استخدمنا متباينة المثلث نجد هنا أن  $١٣ = ٧ + ٩$  أي أن مجموع طولي ضلعين أصغر من طول الضلع الثالث وبالتالي فإن عدم الأطوال لا يمكن أن تكون أطوال أضلاع مثلث ولذلك لا يوجد مثلث يمكن إيجاد مساحته.

مثال

أوجد باستخدام صيغة هيرون مساحة سطح  $\Delta$   $أ ب هـ$  الذي فيه:

$أ = ٥$   $ب = ١٢$   $هـ = ١٣$

الحل

$$٢٠ = ١٣ + ١٢ + ٥ = ع$$

$$١٥ = ع \therefore$$

$$ع - أ = ١٥ - ٥ = ١٠ \quad ع - ب = ١٥ - ١٢ = ٣ \quad ع - هـ = ١٥ - ١٣ = ٢$$

$$\therefore \text{مساحة } \Delta = \frac{ع(ع-أ)(ع-ب)(ع-هـ)}{٤}$$

$$= \frac{١٥ \times ١٠ \times ٣ \times ٢}{٤} = ٢٢٥$$





## مثال ٢

أوجد مساحة المثلثات الآتية (إن أمكن ذلك)

- ١ مثلث أطوال أضلاعه ٩، ٩، ٩ من السنتيمترات
- ٢ مثلث أطوال أضلاعه ٩، ٩، ٩ من السنتيمترات

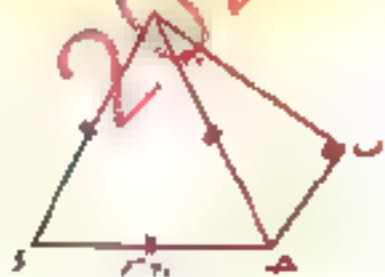
## الحل

- ١ بفرض أن  $a = 9$ ،  $b = 9$ ،  $c = 9$   
 $\therefore a = b = c = 9$   
 $\therefore \Delta = \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$
- ٢ بفرض أن  $a = 9$ ،  $b = 9$ ،  $c = 9$   
 $\therefore a = b = c = 9$   
 $\therefore \Delta = \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$

## مثال ٣

الشكل المقابل ،

يبين قطعة أرض أبعادها  
 كما هو موضح بالشكل  
 أوجد مساحته لأقرب ٢

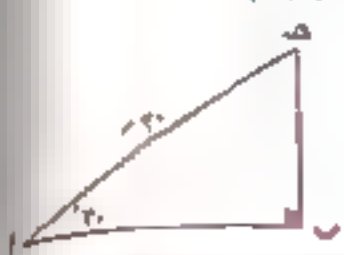


## الحل

- ١  $\Delta ABC$  متساوي الأضلاع  
 $\therefore a = b = c = 30$   
 $\therefore \Delta = \frac{1}{2} \times 30 \times 30 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 30 \times 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{450\sqrt{3}}{2}$
- ٢  $\Delta ACD$   
 $\therefore a = 50$ ،  $b = 60$ ،  $c = 30$   
 $\therefore \Delta = \frac{1}{2} \times 50 \times 60 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 50 \times 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1500\sqrt{3}}{2}$



$$\therefore \text{مساحة } \triangle \text{ ا ه د} = \frac{(\text{ا} - \text{ع})(\text{ب} - \text{ع})(\text{د} - \text{ع})}{4} = \frac{3 \times 10 \times 10 \times 10}{4} = 750$$



$\triangle \text{ ا ب د} :$

$$\text{ب د} = 10, \text{ا ب} = 3$$

$$\text{ا د} = 10.5, \text{ب ا} = 3$$

مساحة  $\triangle \text{ ا ب د} = \frac{1}{2} \times \text{حاصل ضرب طول ضلعيه} \times \text{الزاوية المحصورة بينهما}$

$$\text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د} = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ب د} \times \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 10 \times 1 = 15$$

$$750 = 15 + \text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د} = 765$$

$\therefore$  مساحة الشكل ا ب د ه ا = مساحة  $\triangle \text{ ا ب د} + \text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د}$

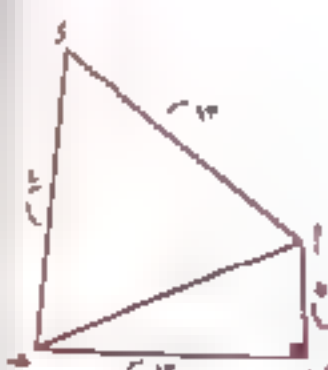
$$765 = 15 + 750$$

### مثال

أوجد مساحة الشكل الرباعي ا ب د ه ا الذي فيه  $\angle \text{ب} = 90^\circ$  و  $\text{ا ب} = 5$  و  $\text{ب د} = 12$

$$\text{ا د} = 13, \text{ا ب} = 5, \text{ب د} = 12$$

### الحل



في  $\triangle \text{ ا ب د} :$

$$\text{مساحة } \triangle \text{ ا ب د} = \frac{1}{2} \times \text{ا ب} \times \text{ب د} \times \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times 1 = 30$$

$$30 = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 \times 1 = 30$$

$$\therefore \angle \text{ب} = 90^\circ$$

$$\therefore \text{ا د} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

في  $\triangle \text{ ا د ه} :$

$$39 = 13 + 13 + 13 = 39$$

$$\therefore 19.5 = \frac{1}{2} \times 13 \times 13 \times \sin 90^\circ = 105.75$$

$$\text{مساحة } \triangle \text{ ا د ه} = \frac{1}{2} \times (\text{ا د} - \text{ا ب})(\text{ا د} - \text{ب د})(\text{ا د} - \text{د ه}) \times \sin 90^\circ = \frac{1}{2} \times (13 - 5)(13 - 12)(13 - 5) \times 1 = 19.5$$

$\therefore$  مساحة الشكل الرباعي ا ب د ه ا = مساحة  $\triangle \text{ ا ب د} + \text{مساحة } \triangle \text{ ا د ه}$

$$105.75 = 19.5 + 30 = 135.75$$



### مثال

إذا كان محيط  $\Delta$   $ABC$  = 300 متر والنسبة بين أطوال أضلاعه  
 $a : b : c = 3 : 5 : 7$  أوجد مساحة  $\Delta$   $ABC$ .

### الحل

نفرض أن  $a = 3x$ ،  $b = 5x$ ،  $c = 7x$

$\therefore$  محيط  $\Delta$   $ABC = a + b + c$

$$300 = 3x + 5x + 7x$$

$$300 = 15x$$

$$20 = x$$

$$\therefore a = 3 \times 20 = 60$$

$$b = 5 \times 20 = 100$$

$$c = 7 \times 20 = 140$$

$$\therefore s = 150$$

$$s = 60 + 100 + 140 = 300$$

$$a - s = 60 - 150 = -90 \quad b - s = 100 - 150 = -50 \quad c - s = 140 - 150 = -10$$

$$\therefore \text{مساحة } \Delta ABC = \frac{1}{4} (a - s)(b - s)(c - s)$$

$$= \frac{1}{4} \times 90 \times 50 \times 10 = 11250$$

### مثال

أوجد طول نصف قطر الدائرة التي تلمس أضلاع  $\Delta$   $ABC$  الذي أطوال أضلاعه  
 $14, 9, 7$  من المستقيمات من الداخل مقررًا الناتج لأقرب رقم عشري واحد.

### الحل

نفرض أن  $a = 14$ ،  $b = 9$ ،  $c = 7$

$$s = \frac{14 + 9 + 7}{2} = 15$$

$$a - s = 14 - 15 = -1 \quad b - s = 9 - 15 = -6 \quad c - s = 7 - 15 = -8$$

$$\therefore r = \frac{1}{4} \times \frac{1 \times 6 \times 8}{15} = \frac{1}{5}$$



الأسئلة  
الأسئلة  
الأسئلة

الأسئلة

الأسئلة

الأسئلة



الأسئلة

الأسئلة

① إذا كان  $\theta = 2$  فإن  $\theta = \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$    
 [ -1 ، 1 ، صفر ، 1 ]

② إذا كان  $\theta = 1$  فإن  $\theta = \frac{\theta}{1 + \theta}$    
 [ 0.5 ، 0.25 ، 0.75 ، 0.125 ]

③ إذا كان  $\theta = 1$  فإن  $\theta = \frac{\theta}{1 + \theta}$    
 [ 0.5 ، 0.25 ، 0.75 ، 0.125 ]

④ إذا كان  $\theta = 1$  فإن  $\theta = \frac{\theta}{1 + \theta}$    
 [ 0.5 ، 0.25 ، 0.75 ، 0.125 ]

⑤ إذا كان  $\theta = 1$  حيث  $\theta > 1$    
 قيمة: 1.2 ، 1.1 ، 1.0 ، 0.9

الأسئلة

(أ)  $\theta = 1$    
 (ب)  $\theta = 1$









⑤ في الشكل المقابل.

مساحة سطح  $\triangle$  ا ب هـ

تساوي .....

[ ٣٠ ] ا ٦٠ ب ١٢٠ ج ١٢٠ د ٢٤٠

⑥ إذا كان محيط مثلث هو ٦٠ وطول أحد أضلاعه ٢٦ فإن طول ضلعي الآخرين باء ..... يمكن أن يكونا

[ ٣٠، ٤ ] ا ٣٠، ٣٩ ب ٤٠، ٢٠ ج ٤٠، ٢٠ د ٣٩، ٢٢

### مسائل المستوى الثاني

① أوجد مساحة مثلث ا ب هـ الذي فيه

[ ٢٢١ ]

① ا = ٦، ب = ٨، هـ = ١٠

[ ٢٢٢ ]

② ا = ٨، ب = ١١، هـ = ١٣

[ ٢٢٣ ]

③ ا = ١٢، ب = ١٧، هـ = ١٣

[ ٢٢٤ ]

④ ا = ٢٠، ب = ١٢، هـ = ١٦

[ ٢٢٥ ]

⑤ ا = ١٠، ب = ٢٤، هـ = ٢٢

[ ٢٢٦ ]

⑥ ا = ١٥، ب = ١٢، هـ = ٩

② أوجد مساحة كل من الأشكال الآتية مستخدماً البيانات المبينة على الرسم:



②



①

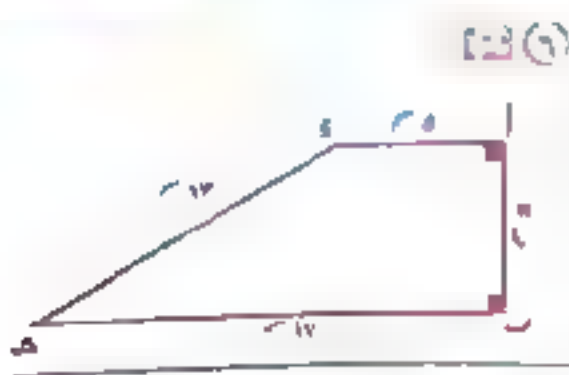


④



③





١) أوجد مساحة الشكل الرباعي  $ABCD$  الذي فيه  $AB = 8$ ،  $BC = 16$ ،  $CD = 17$ ،  $DA = 15$ ،  $\angle D = 90^\circ$  [٢٠٢٠]

٢) أوجد مساحة الشكل الرباعي  $ABCD$  الذي فيه  $AB = 8$ ،  $BC = 16$ ،  $CD = 17$ ،  $DA = 15$ ،  $\angle A = 90^\circ$  [٢٠٢٠]

٣) أوجد مساحة الشكل الرباعي  $ABCD$  الذي فيه  $AB = 8$ ،  $BC = 16$ ،  $CD = 17$ ،  $DA = 15$ ،  $\angle C = 90^\circ$  [٢٠٢٠]

٤)  $AB$  مثلث متساوي الساقين محيطه  $30$  وطول ضلع قاعدته تساوي  $8$ ، أوجد مساحة سطح  $\triangle ABC$  [٢٠٢٠]

٥) حذيفة على شكل مثلث النسبة بين أطوال أضلاعه هي  $3:5:7$  فإذا كان محيط الحذيفة يساوي  $30$  متر فأوجد مساحته [٢٠٢٠]

### التمرين الثاني: تقيس مسنوعات عليا من التفكير

١)  $AB$  مثلث متساوي الساقين محيطه  $32$ ،  $AC = 12$ ،  $BC = 12$ ،  $AB = 8$ ، النسبة بين أطوال أضلاعه  $AB:BC:AC = 4:4:4$ ، أوجد مساحته [٢٠٢٠]



# الماهر

فى

الرياضيات البحتة

للصف الثانى الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

## حلول الكتاب

تابعنا تيليجرام

إعزائو

<https://t.me/miri33andyou1>

ماهر أحمد محمود

يطلب من : دار الكوثر للنشر والتوزيع بالقجالة

الطبعة الفنية ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠٢ - ١٣٩٥٠٠١٣

وللاقتراحات ٢٣٩٥٠٠١٣ / ٠١٠٠١٥٠٨٠٠٥ من ب ١٣ الدواوين - القاهرة

[www.ELMAHER.org](http://www.ELMAHER.org)

أو على موقعنا







$$A \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{r} (1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4}) = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{2}$$

$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{r} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{r^3} + \frac{\pi}{4} \frac{1}{r^4} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{r} (1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4}) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{3}$$

$$(1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{4} \quad (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{5}$$

$$1 - \frac{1}{r} \textcircled{6} \quad \frac{1}{r} \textcircled{7}$$

$$(1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{8} \quad (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{9} \quad \frac{1}{r} \textcircled{10}$$

$$(\frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{11} \quad (\frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{12} \quad \frac{1}{r} \textcircled{13}$$

$$(1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \textcircled{14}$$

$$(1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} - (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 0$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} = \frac{1 + \frac{1}{r}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{r}}{1}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5}$$

$$1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$(1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} (1 + \frac{1}{r}) = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{15}$$

$$\frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} - \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$\frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$(1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} - (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r}$$

$$1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} = \frac{1 + \frac{1}{r}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{r}}{1}$$

$$1 + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{r} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}}$$

$$u(1 - u) = 1 - u(1 - u) = 1 - u + u^2 \textcircled{16}$$

$$u(1 - u) = 1 - u = [1 - u] u(1 - u) =$$

هذا المقادير موجب عند  $u$  عدد حقيقي وسالب عند  $u$  عدد زوجي  
أي أن المتكاملة ليست تزايدية وليست تناقصية (متذبذبة)

$$1 + u \left( \frac{1}{r} \right) - 1 + u \left( \frac{1}{r} \right) = u \frac{1}{r} - u \frac{1}{r} \textcircled{17}$$

$$1 + u \left( \frac{1}{r} \right) - 1 + u \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} = [1 - \frac{1}{r}] \frac{1}{r} \left( \frac{1}{r} \right) =$$

$$u \frac{1}{r} > 1 + u \frac{1}{r} \therefore$$

النتيجة سالبة > صفر

النتيجة تناقصية

$$[1 + (1 + u)] \frac{1}{r} (1 - u) = u \frac{1}{r} + u \frac{1}{r} \textcircled{18}$$

$$[(1 + u) \frac{1}{r} (1 - u)] =$$

$$[(1 + u) \frac{1}{r} (1 - u)] - [(1 + u) \frac{1}{r} (1 - u)] =$$

$$[1 + u - 1 - u - u^2 - u^2] \frac{1}{r} =$$

$$[2 - u^2 - u^2] \frac{1}{r} =$$

$$[2 + u^2 + u^2] \frac{1}{r} =$$

النتيجة سالبة على قيمة  $u$

النتيجة متذبذبة لا تزايدية ولا تناقصية

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{19}$$

$$[1 + \frac{1}{r} (1 - \frac{1}{r})] \frac{1}{r} \textcircled{20}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{21}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{22}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{23}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{24}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{25}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{26}$$

$$1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} + \frac{1}{r^5} = (1 + \frac{1}{r}) \frac{1}{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{r}} \textcircled{27}$$











الممسوحة ضوئياً بـ CamScanner







$$\begin{aligned} 9 &= 7 - 9 = 2 \div 1 & 10 &= 9 + 9 = 18 - 1 \\ 7 &= 9 - 9 = 0 \div 1 & 11 &= 9 + 9 = 18 - 1 \\ & & 4 &= 1 \div 1 \end{aligned}$$

الآن الحل هو (١٢٤١٢٤١٠)

$$\begin{aligned} 99 &= 9 \div 1 & 87 &= 9 \times 11 + 7 = 10 \div 1 \\ 99 &= 9 - 99 + 9 & 99 &= 9 \times (1 - 9) + 1 \\ 17 &= 9 \div 1 & 9 \div 7 &= 9 \div 1 \end{aligned}$$

$$A = 7 + 7 = 7 + 9 \div 1 = 7 \div 1 \quad 9 = 1 \div 1$$

$$17 = 7 + 9 = 7 + 9 \div 1 \div 1 \quad 9 = 7 + 7 = 7 + 9 \div 1 \div 1$$

الآن النتيجة هي (١٢٤١٠٤٨٤٩)

$$76 = 11 + 17 = 9 \div 1 + 9 \div 1$$

$$79 = 9 \div 1 \quad 7 = 1 \div 1 \quad 7 = 9 \div 1$$

$$(1) + 79 = 9 \times (1 - 9) \div 1 \quad 79 = 9(1 - 9) + 7$$

$$79 = 9(1 - 9) + 7 \div 1 \quad 79 = 9 \div 1$$

$$(7) = 79 = 9(1 - 9 \div 1)$$

بقسمة (١) على (٧)

$$\frac{9}{79} = \frac{1 - 9}{1 - 9 \div 1} \div 1 \quad \frac{79}{79} = \frac{1 - 9}{1 - 9 \div 1}$$

$$1 = 9 \div 1 \quad 9 - 9 \div 1 = 9 - 9 \div 1$$

$$1 = 9 \div 1 \quad (1) = 9$$

النتيجة هي (١٢٤٧٤٣)

$$70 = 9 \div 1 \quad 79 = 9 \div 1 \quad 79 = 9 \div 1$$

$$79 = 9 \div 1$$

$$7 = 9 \div 1 \quad 79 = 9 \div 1 \quad 79 = 9 \div 1$$

الآن النتيجة هي (١٢٤١٠٤١٢)

$$70 = 9 \div 1 \quad 79 = 9 \div 1$$

$$7 - 199 = 9 \div 1 \quad 9 - 199 = 7 - 1 = 9 \div 1$$

$$7 - 199 = 7 + 199 \div 1 \quad 7 + 199 = 9 \div 1$$

$$A = 7 \div 1 \quad 199 = 7 \div 1$$

$$8 = 7 - A = 9 \div 1 \quad 18A = A - 199 = 9 \div 1$$

$$199 = 7(1 - 9) + 1 \div 1 \quad 199 = 9 \div 1$$

$$199 = 8 \times (1 - 9) + 7$$

$$77 = 9 \div 1 \quad 1 + \frac{7 - 199}{9} = 9$$

$$78 = 79 + 8 \div 1 \quad 78 = 9 \div 1$$

$$1 = 9 \div 1 \quad 70 = 9 \div 1$$

$$7 = 9 \div 1 - 9 \div 1 \quad 9 \div 7 = 9 \div 1$$

$$19 + 199 = 1 \div 1 \quad (79 + 1)79 = 1 \div 1$$

$$7 = (19 + 1) - (79 + 1)79 \div 1 \quad (1) = 9 = 79 + 1 \div 1$$

$$(7) = 7 = 79 + 1 \div 1 \quad 9 = 19 - 1 - 79 + 1 \div 1$$

بحل المعادلتين

$$9 = 79 + 1 \div 1$$

$$7 = 79 + 1 \div 1$$

$$7 = 9 \div 1 \quad 9 = 79 \div 1 \quad 7 = 9 \div 1$$

$$10 = 1 \div 1 \quad 70 = 1 \div 1$$

الآن النتيجة هي (١٢٤١٢٤١٠)

$$(1) = 70 = 79 + 1 \div 1 \quad 70 = 9 \div 1$$

$$\frac{1}{79} = \frac{79 + 1}{79 + 1} \div 1 \quad \frac{1}{79} = \frac{79}{79} \div 1$$

$$9 = 79 - 1 \div 1 \quad 79 + 1 = 79 + 1 \div 1$$

$$(7) = 9 = 79 - 1 \div 1$$

$$7 = 9 \div 1 \quad 9 = 1 \div 1 \quad (7) = 9 \div 1$$

النتيجة هي (١٢٤١٢٤١٠)

$$87 = (79 + 1) + (79 + 1) \div 1 \quad 87 = 9 \div 1 + 9 \div 1$$

$$(1) = 71 = 79 + 1 \div 1 \quad 87 = 9 \div 1 + 79$$

$$710 = 9 \div 1 \times 9 \div 1$$

$$(7) = 710 = (9 \div 1 + 1) \times (79 + 1)$$

بالتمويض من (١) في (٧)

$$70 = \frac{710}{79} = 79 + 79 \div 1 \quad 710 = (9 \div 1 + 79) \times 79$$

$$7 = 9 \div 1 \quad 9 = 79 - 70 = 9 \div 1$$

$$77 = 7 \div 1 \quad 79 = 7 - 9 \times 7 + 1$$

النتيجة هي (١٢٤٧٤٢٧)

$$10 = 79 + 1 + 79 + 1 + 79 + 1 + 79 + 1 + 79 + 1$$

$$9 = 1 \div 1 \quad 10 = 79 \div 1$$

$$117 = (79 + 1)(79 + 1) + (79 + 1)(79 + 1)$$

$$117 = 79 - 79 + 79 - 79$$

$$10 = 79 - 79 = 117 - 79 - 79 \div 1 \div 1 \quad 117 = 79 - 79 \div 1 \div 1$$

$$79 = 79 \div 1 \quad 9 = 79 \div 1$$

(١) معادلة ٧

$$9 = 1 \div 1 \quad 9 = 79 - 9 = 79 - 79 \div 1 \div 1 \quad 79 = 79 \div 1$$

$$10 = 79 + 9 = 79 + 79 \div 1 \div 1 \quad 17 = 79 + 9 = 79 - 79 \div 1 \div 1$$

الآن الحل هو (١٢٤١٢٤١٠٤٣)

$$7 = 9 \div 1 \quad 7 = 9 \div 1$$







١٤. الأعداد:  $13 + 20 + 30 + 40 + 50 + 60 + 70 + 80 + 90 + 100$

$$\frac{a}{12} = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{a}{12} = \frac{1}{x-20} \quad \therefore \quad \frac{a}{12} = \frac{1-20+x+20}{(x-20)}$$

$$10 = x \quad 1 = x \quad 70 = x - 20 \quad \therefore \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{x-20}$$

الأعداد هي ١٤٦٤٤٢٧

١٥. المتكافئة:  $13 \frac{1}{4}, 18 \frac{1}{4}, \dots$

$$\frac{1}{4} = x \quad 13 = 1$$

$$\frac{1}{4} \times 13 + 13 = x(1 - 1 + 13) + 1 = 10 \text{ عدد}$$

$$(1) \rightarrow 10 \frac{1}{4} + 13 = 10 \text{ عدد}$$

١٦. المتكافئة:  $13, 18, 23, 28, 33, 38, 43, 48, 53, 58, 63, 68, 73, 78, 83, 88, 93, 98, 103$

$$1, 5 = x \quad 17 = 1$$

$$x(1 - 2 + 13) + 1 = 10 \text{ عدد}$$

$$\frac{1}{4} - 13 - 11 = \frac{1}{4} \times (1 + 13) + 1 = 10$$

$$(2) \rightarrow 13 - 11, 5 = 10 \text{ عدد}$$

$$13 - 11, 5 = 10 \frac{1}{4} + 13$$

$$13 - 11, 5 = 10 + 10$$

$$x = 10 \quad \frac{13, 5}{10, 5} = 10 \quad 13, 5 = 10, 5$$

$$(1) \rightarrow (10 + 10) - (10 - 10) = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

بفرض أن:

$$10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$(10 - 10) + (10 - 10) = 10 + 10 = 10$$

$$(10 - 10) + 10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$(10 + 10) = (10 + 10) = 10$$

$$10 = 10$$

$$10 = 10$$

١٧. الأعداد هي:

$$10 - 10 = 10 - 10 = 10$$

$$10 - 10 = 10 - 10 = 10$$

$$10 - 10 = 10 - 10 = 10$$

١٨. الأعداد هي:  $10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100$

$$10 + 10 = 20 + 10 \quad 10 + 10 = 20 + 10$$

$$10 = 10 \quad 10 = 10 \quad 10 = 10 \quad 10 = 10$$

$$10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$10 \times (1 - 10) = 10 \quad 10 \times (1 - 10) + 10 = 10$$

$$10 = 10 \quad 10 = 10$$

$$10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$10(1 - 10) + 10 = 10 \quad 10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$10 = 10(1 - 10) + 10 = 10 - 10 + 10 = 10$$

$$10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$(1) \rightarrow 10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$(2) \rightarrow 10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$10(1 + 10 - 1 - 10) = 10 - 10$$

$$10(10 - 10) = (10 - 10)(10 + 10)$$

$$10 + 10 = 10$$

$$10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$(1) \rightarrow 10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$(2) \rightarrow 10(1 - 10) + 10 = 10$$

$$10(10 - 10) = \frac{10}{10} - \frac{10}{10}$$

$$\frac{10}{10} = \frac{10}{10} \times (1 - 10) + 10$$

$$\frac{10 + 10 - 10}{10} = \frac{10 - 10}{10} - \frac{10}{10} = 10$$

$$10(1 - 10 + 10) + 10 = 10 + 10$$

$$\frac{10}{10} + \frac{10}{10} = \frac{10 + 10}{10} = \frac{10 - 10 + 10}{10} + \frac{10}{10} =$$

$$\frac{10}{10} + \frac{10}{10} =$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$

$$10 + 10 = 10 + 10 = 10$$



من  $x = y = z = 1$  من متساوي ثابت

من  $(x^2 + y^2 + z^2) = 3$  تكون متساوية حسابية

(38) نفرض أن المتساوية الأولى  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1$

والمتساوية الثانية  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1$

$$(1) \quad 1 + 1 = 1$$

$$1 + 1 = 1 + 1$$

$$(2) \quad 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$(3) \quad 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

من المتساوية الأولى  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1$  بالتعويض في (1)

من المتساوية الثانية  $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1$  بالتعويض في (2)

$$(1) \quad 1 + 1 = 1 + 1$$

$$1 + 1 = 1 + 1$$

بالتعويض في (1)  $1 + 1 = 1 + 1$

$$(2) \quad 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

من المتساوية هي  $(1 + 1 + 1 + \dots + 1) = 1$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$(1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1$$

$$(1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$(1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1$$

$$(1 + 1 + 1) = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$

$$1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$$











١٠٠. بوسط حسابی بین ۱ و ۲  
 $u = \frac{1+2}{2} = 1.5$   
 $v = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$   
 $w = \frac{1+1.25}{2} = 1.125$   
 $x = \frac{1+1.125}{2} = 1.0625$   
 $y = \frac{1+1.0625}{2} = 1.03125$

١١. بوسط حسابی بین ۱ و ۲

بین ۱ و ۲  
 $\frac{1+2}{2} = 1.5$   
 $\frac{1+1.5}{2} = 1.25$   
 $\frac{1+1.25}{2} = 1.125$   
 $\frac{1+1.125}{2} = 1.0625$   
 $\frac{1+1.0625}{2} = 1.03125$   
 $\frac{1+1.03125}{2} = 1.015625$   
 $\frac{1+1.015625}{2} = 1.0078125$   
 $\frac{1+1.0078125}{2} = 1.00390625$   
 $\frac{1+1.00390625}{2} = 1.001953125$   
 $\frac{1+1.001953125}{2} = 1.0009765625$   
 $\frac{1+1.0009765625}{2} = 1.00048828125$   
 $\frac{1+1.00048828125}{2} = 1.000244140625$   
 $\frac{1+1.000244140625}{2} = 1.0001220703125$   
 $\frac{1+1.0001220703125}{2} = 1.00006103515625$   
 $\frac{1+1.00006103515625}{2} = 1.000030517578125$   
 $\frac{1+1.000030517578125}{2} = 1.0000152587890625$   
 $\frac{1+1.0000152587890625}{2} = 1.00000762939453125$   
 $\frac{1+1.00000762939453125}{2} = 1.000003814697265625$   
 $\frac{1+1.000003814697265625}{2} = 1.0000019073486328125$   
 $\frac{1+1.0000019073486328125}{2} = 1.00000095367431640625$   
 $\frac{1+1.00000095367431640625}{2} = 1.000000476837158203125$   
 $\frac{1+1.000000476837158203125}{2} = 1.0000002384185791015625$   
 $\frac{1+1.0000002384185791015625}{2} = 1.00000011920928955078125$   
 $\frac{1+1.00000011920928955078125}{2} = 1.000000059604644775390625$   
 $\frac{1+1.000000059604644775390625}{2} = 1.0000000298023223876953125$   
 $\frac{1+1.0000000298023223876953125}{2} = 1.00000001490116119384765625$   
 $\frac{1+1.00000001490116119384765625}{2} = 1.000000007450580596923828125$   
 $\frac{1+1.000000007450580596923828125}{2} = 1.0000000037252902984619140625$   
 $\frac{1+1.0000000037252902984619140625}{2} = 1.00000000186264514923095703125$   
 $\frac{1+1.00000000186264514923095703125}{2} = 1.000000000931322574615478515625$   
 $\frac{1+1.000000000931322574615478515625}{2} = 1.0000000004656612873077392578125$   
 $\frac{1+1.0000000004656612873077392578125}{2} = 1.00000000023283064365386962890625$   
 $\frac{1+1.00000000023283064365386962890625}{2} = 1.000000000116415321826934814453125$   
 $\frac{1+1.000000000116415321826934814453125}{2} = 1.0000000000582076609134674072265625$   
 $\frac{1+1.0000000000582076609134674072265625}{2} = 1.00000000002910383045673370361328125$   
 $\frac{1+1.00000000002910383045673370361328125}{2} = 1.000000000014551915228366851806640625$   
 $\frac{1+1.000000000014551915228366851806640625}{2} = 1.0000000000072759576141834259033203125$   
 $\frac{1+1.0000000000072759576141834259033203125}{2} = 1.00000000000363797880709171295166015625$   
 $\frac{1+1.00000000000363797880709171295166015625}{2} = 1.000000000001818989403545856475830078125$   
 $\frac{1+1.000000000001818989403545856475830078125}{2} = 1.0000000000009094947017729282379150390625$   
 $\frac{1+1.0000000000009094947017729282379150390625}{2} = 1.00000000000045474735088646411895751953125$   
 $\frac{1+1.00000000000045474735088646411895751953125}{2} = 1.000000000000227373675443232059478759765625$   
 $\frac{1+1.000000000000227373675443232059478759765625}{2} = 1.0000000000001136868377216160297393798828125$   
 $\frac{1+1.0000000000001136868377216160297393798828125}{2} = 1.00000000000005684341886080801486968994140625$   
 $\frac{1+1.00000000000005684341886080801486968994140625}{2} = 1.000000000000028421709430404007434844970703125$   
 $\frac{1+1.000000000000028421709430404007434844970703125}{2} = 1.0000000000000142108547152020037174224853515625$   
 $\frac{1+1.0000000000000142108547152020037174224853515625}{2} = 1.00000000000000710542735760100185871124267578125$   
 $\frac{1+1.00000000000000710542735760100185871124267578125}{2} = 1.000000000000003552713678800500929355621337890625$   
 $\frac{1+1.000000000000003552713678800500929355621337890625}{2} = 1.0000000000000017763568394002504646778106689453125$   
 $\frac{1+1.0000000000000017763568394002504646778106689453125}{2} = 1.00000000000000088817841970012523233890533447265625$   
 $\frac{1+1.00000000000000088817841970012523233890533447265625}{2} = 1.000000000000000444089209850062616169452667236328125$   
 $\frac{1+1.000000000000000444089209850062616169452667236328125}{2} = 1.0000000000000002220446049250313080847263336181640625$   
 $\frac{1+1.0000000000000002220446049250313080847263336181640625}{2} = 1.00000000000000011102230246251565404236316680908203125$   
 $\frac{1+1.00000000000000011102230246251565404236316680908203125}{2} = 1.000000000000000055511151231257827021181583404541015625$   
 $\frac{1+1.000000000000000055511151231257827021181583404541015625}{2} = 1.0000000000000000277555756156289135105907917022705078125$   
 $\frac{1+1.0000000000000000277555756156289135105907917022705078125}{2} = 1.00000000000000001387778780781445675295395850113525390625$   
 $\frac{1+1.00000000000000001387778780781445675295395850113525390625}{2} = 1.000000000000000006938893903907228376476979250567626953125$   
 $\frac{1+1.000000000000000006938893903907228376476979250567626953125}{2} = 1.0000000000000000034694469519536141882384896252838134765625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000034694469519536141882384896252838134765625}{2} = 1.00000000000000000173472347597680709411924481264190673828125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000173472347597680709411924481264190673828125}{2} = 1.000000000000000000867361737988403547059622406320953369140625$   
 $\frac{1+1.000000000000000000867361737988403547059622406320953369140625}{2} = 1.0000000000000000004336808689942017735298112031604766845703125$   
 $\frac{1+1.0000000000000000004336808689942017735298112031604766845703125}{2} = 1.00000000000000000021684043449710088676490560158023834228515625$   
 $\frac{1+1.00000000000000000021684043449710088676490560158023834228515625}{2} = 1.000000000000000000108420217248550443382452800790119171142578125$   
 $\frac{1+1.000000000000000000108420217248550443382452800790119171142578125}{2} = 1.0000000000000000000542101086242752216912264003950595855712890625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000542101086242752216912264003950595855712890625}{2} = 1.00000000000000000002710505431213761084561320019752979278564453125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000002710505431213761084561320019752979278564453125}{2} = 1.000000000000000000013552527156068805422806600098764896392822265625$   
 $\frac{1+1.000000000000000000013552527156068805422806600098764896392822265625}{2} = 1.0000000000000000000067762635780344027114033000493824481964111328125$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000067762635780344027114033000493824481964111328125}{2} = 1.00000000000000000000338813178901720135570165002469122409820556640625$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000338813178901720135570165002469122409820556640625}{2} = 1.000000000000000000001694065894508600677850825012345612049102783203125$   
 $\frac{1+1.000000000000000000001694065894508600677850825012345612049102783203125}{2} = 1.0000000000000000000008470329472543003389254125061728060245513916015625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000008470329472543003389254125061728060245513916015625}{2} = 1.00000000000000000000042351647362715016946270625308640301227569580078125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000042351647362715016946270625308640301227569580078125}{2} = 1.000000000000000000000211758236813575084731353126543201506137847900390625$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000211758236813575084731353126543201506137847900390625}{2} = 1.0000000000000000000001058791184067875423656765632716007530689239501953125$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000001058791184067875423656765632716007530689239501953125}{2} = 1.00000000000000000000005293955920339377118283828163580037653446197509765625$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000005293955920339377118283828163580037653446197509765625}{2} = 1.000000000000000000000026469779601696855911419140817900187667230987548828125$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000026469779601696855911419140817900187667230987548828125}{2} = 1.0000000000000000000000132348898008484279557095704089500938336154937744140625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000132348898008484279557095704089500938336154937744140625}{2} = 1.00000000000000000000000661744490042421397785478520447504691680774688720703125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000661744490042421397785478520447504691680774688720703125}{2} = 1.000000000000000000000003308722450212106988927392602237523458403873443603515625$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000003308722450212106988927392602237523458403873443603515625}{2} = 1.0000000000000000000000016543612251060534944636963011187617292019367218017578125$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000016543612251060534944636963011187617292019367218017578125}{2} = 1.00000000000000000000000082718061255302674723184815055938086460096836090087890625$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000082718061255302674723184815055938086460096836090087890625}{2} = 1.000000000000000000000000413590306276513373615924075279690432300484180450439453125$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000000413590306276513373615924075279690432300484180450439453125}{2} = 1.0000000000000000000000002067951531377668868079620376398452161502420902252197265625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000002067951531377668868079620376398452161502420902252197265625}{2} = 1.00000000000000000000000010339757656888344340398101881992260807512104511260986328125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000010339757656888344340398101881992260807512104511260986328125}{2} = 1.000000000000000000000000051698788284441721701990509409961304037560522556304931640625$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000000051698788284441721701990509409961304037560522556304931640625}{2} = 1.0000000000000000000000000258493941422208608509952547049806520187802612781524658203125$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000000258493941422208608509952547049806520187802612781524658203125}{2} = 1.00000000000000000000000001292469707111043042549762735249032600939013063907623291015625$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000001292469707111043042549762735249032600939013063907623291015625}{2} = 1.000000000000000000000000006462348535555215212748813676245163004695065319538116455078125$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000000006462348535555215212748813676245163004695065319538116455078125}{2} = 1.0000000000000000000000000032311742677776076063744068381225815023475326597690582275390625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000000032311742677776076063744068381225815023475326597690582275390625}{2} = 1.00000000000000000000000000161558713388880380318720341906129075117376632988452911376953125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000000161558713388880380318720341906129075117376632988452911376953125}{2} = 1.00000000000000000000000000080779356694440190159360170953064537558688316494226455689765625$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000000080779356694440190159360170953064537558688316494226455689765625}{2} = 1.000000000000000000000000000403896783472200950796800854765322687793441582471132278448828125$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000000000403896783472200950796800854765322687793441582471132278448828125}{2} = 1.0000000000000000000000000002019483917361004753984004273826613438967207912355661392244140625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000000002019483917361004753984004273826613438967207912355661392244140625}{2} = 1.00000000000000000000000000010097419586805023769920021369133067194836039561778306961220703125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000000010097419586805023769920021369133067194836039561778306961220703125}{2} = 1.000000000000000000000000000050487097934025118849600106845665335974180197808891534806103515625$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000000000050487097934025118849600106845665335974180197808891534806103515625}{2} = 1.0000000000000000000000000000252435489670125594248000534228326679870900989044457674030517578125$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000000000252435489670125594248000534228326679870900989044457674030517578125}{2} = 1.00000000000000000000000000001262177448350627971240002671141633399354504945222288370152587890625$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000000001262177448350627971240002671141633399354504945222288370152587890625}{2} = 1.000000000000000000000000000006310887241753139856200013355708166996772524726111441850762939453125$   
 $\frac{1+1.000000000000000000000000000006310887241753139856200013355708166996772524726111441850762939453125}{2} = 1.0000000000000000000000000000031554436208765699281000066778540834983862623630557209253714697265625$   
 $\frac{1+1.0000000000000000000000000000031554436208765699281000066778540834983862623630557209253714697265625}{2} = 1.00000000000000000000000000000157772181043828496405000333892704174919313118152786046268573486328125$   
 $\frac{1+1.00000000000000000000000000000157772181043828496405000333892704174919313118152786046268573486328125}{2} = 1.000000000000$







$$(117, 171, 170) \text{ (14)}$$

$$31 - x(1-u) \times 16 + 70 = 111 + 1 = 112$$

$$[1(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112$$

$$[1(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112$$

$$[1 + u(1-17)] \times \frac{1}{4} = 112$$

$$(u - 16)u = 112$$

$$u = 112 - u(16 + 1)$$

$$0 = u \quad \text{و} \quad u = (16 - u)(17 + u)$$

$$1 - x = 1 \quad \text{و} \quad 37 = 1 \text{ (15)}$$

$$1 < 1 \text{ (16)}$$

$$1 + \frac{1}{4} < 1 \quad \therefore$$

$$1 - x(1-u) + 37$$

$$1 = u \quad \text{و} \quad 1 < u$$

$$1 = 1 \quad \therefore$$

$$1 - x(1-u) + 37 = 112$$

$$1 < 1 \text{ (17)}$$

$$[1(1-u) + 37] \frac{1}{4} < 112$$

$$1 - x(1-u) + 37$$

$$11 = u \quad \therefore$$

$$17 > u \quad \text{و} \quad 1 + \frac{1}{4} > u$$

$$1 - x = 1 \quad \text{و} \quad 70 = 1 \text{ (18)}$$

$$1 < 1 \text{ (19)}$$

$$1 + \frac{70}{4} > u \quad \therefore$$

$$1 - x(1-u) + 70$$

$$13 = u \quad \text{و} \quad 13, 1 > u$$

$$\therefore \text{ عند الحدود الموجبة } 13 \text{ (20)}$$

$$119 = 1 \quad \therefore$$

$$[1 - x(17 + 10 \times 2)] \frac{1}{4} = 119$$

$$120 = 1 \text{ (21)}$$

$$120 = [1 - x(1-u) + 70 \times 2] \frac{1}{4}$$

$$120 = 120 + u(17 - 1) \quad \text{و} \quad 120 = (1 + u - 70)u$$

$$1 = u \quad \text{و} \quad 1 = u$$

$$(117, 171, 170) \text{ (22)}$$

$$[1(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112 \quad \text{و} \quad 17 = 1 + 1$$

$$(17) = 17 + 17 = 34 \quad \text{و} \quad [17 + 17] \frac{1}{4} = 34$$

$$\begin{cases} (17) & 17 = 1 + 17 \\ (17) & 17 = 17 + 17 \end{cases} \text{ بالنظر}$$

$$1 = 1 \quad \text{و} \quad 1 = 1 \quad \text{و} \quad 1 = 1$$

$$(117, 171, 170) \text{ (23)}$$

$$[1(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112 \quad \text{و} \quad 17 = 1 + 1 \text{ (24)}$$

$$112 = 112 \quad \text{و} \quad [17(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112$$

$$\therefore u = 1 \quad \text{و} \quad \text{الحل الآخر } 1 - u = 0 \text{ مرفوض}$$

$$\therefore \text{ عند الحدود التي يجب أخذها } 1 \text{ (25)}$$

$$17 = 1 \quad \text{و} \quad 17 = 1 \text{ (26)}$$

$$112 = [17 \times 16 + 17 \times 1] \frac{1}{4} = 112 \text{ (27)}$$

$$112 = 17 \times 16 + 17 = 112 \quad \text{و} \quad 17 = 17 \times 1 + 17 = 112 \text{ (28)}$$

$$396 = [17 + 17] \frac{1}{4} = 112$$

$$[1(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112 \text{ (29)}$$

$$112 = [17 \times (1-u) + 17 \times 1] \frac{1}{4}$$

$$112 = (17 + 17)u \quad \text{و} \quad 112 = [17 - u(17 + 1)] \frac{1}{4}$$

$$(17 + 1) = 112 - u(17 + 1) \quad \text{و} \quad 112 = 112 - u(17 + 1)$$

$$1 = (17 - u)(17 + u) \quad \text{و} \quad 1 = 112 - u(17 + 1)$$

$$\therefore u = 1 \quad \text{و} \quad 17 = 17 \text{ (مرفوض)}$$

$$\therefore \text{ عند الحدود } 1 = 1 \text{ (30)}$$

$$17 = 1 \quad \text{و} \quad 17 = 1 \text{ (31)}$$

$$[1(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112 \quad \text{و} \quad 17 = 1 \text{ (32)}$$

$$112 = [17 - x(1-u) + 17 \times 1] \frac{1}{4}$$

$$112 = 17 + u(17 - 1) \quad \text{و} \quad 112 = 17 + u(17 - 1)$$

$$\therefore \text{ عند الحدود } 11 = 11 \text{ (33)}$$

$$17 = 1 \quad \text{و} \quad 17 = 1 \text{ (34)}$$

$$[17 - x(1-u) + 17 \times 1] \frac{1}{4} > 112 \quad \text{و} \quad 17 > 1$$

$$1 + \frac{17}{4} < 1 \quad \text{و} \quad 17 < (1-u)17 - 17$$

$$17 < 1 \quad \text{و} \quad 17 < 1$$

$$17 = 1 \quad \text{و} \quad 17 = 1 \text{ (35)}$$

$$17 < 1 \quad \text{و} \quad 17 < 1$$

$$[1 - x(1-u) + 70 \times 2] \frac{1}{4} < 112$$

$$1 + \frac{70}{4} > u \quad \text{و} \quad 17 < (1-u)17 - 17$$

$$17 < 1 \quad \text{و} \quad 17 < 1$$

$$1 < 1, 1 + u(17 - 1) = 17 < 1 \text{ (36)}$$

$$11 = u \quad \text{و} \quad 17 > u \quad \text{و} \quad 17 < 1$$

$$[1(1-u) + 17] \frac{1}{4} = 112$$

$$112 = [17(1-u) + 17] \frac{1}{4}$$



$$u^2 - v^2 = 24 \Leftrightarrow (2 - u^2 + v^2) \frac{2}{3} = 24$$

$$1 = (19 + u)(2 - u) \Leftrightarrow 1 = 24 - u^2 - 19u$$

$$\text{بحال } 9 = u^2$$

$$[2(1-u) + 19] \frac{2}{3} = 24 \quad (17)$$

$$89 = [2(19 + 19) + 19] \frac{2}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow 89 = 24 + 19$$

$$8 = (28 + 1) - (27 + 1 + 28 + 1)$$

$$89 = 24 + 19 \text{ من (2) و (1) } (2) \Leftrightarrow 8 = 1$$

$$1 = 2 \Leftrightarrow 19 = 24$$

$$\text{النتيجة هي } (19, 24)$$

$$17 = 24 + 24 \quad (18)$$

$$(1) \Leftrightarrow 17 = 24 + 19 \Leftrightarrow 17 = 24 + 1 + 27 + 1$$

$$\frac{24 - 17}{2} = 3 \text{ } 24 - 17 = 7$$

$$1 = (24 + 1)(27 + 1) \Leftrightarrow 1 = 24 \times 27$$

$$1 = \left( 24 + \frac{24 - 17}{2} \right) \left( 27 + \frac{24 - 17}{2} \right)$$

$$1 = \left( \frac{24 + 24 - 17}{2} \right) \left( \frac{27 + 24 - 17}{2} \right)$$

$$1 = \frac{24 - 17}{2} \Leftrightarrow 1 = \left( \frac{24 - 17}{2} \right) \left( \frac{27 - 17}{2} \right)$$

$$2 = 2 \text{ } 17 = 24 \times 2 \Leftrightarrow 17 = 2 - 24$$

$$17 = 2 \text{ } 17 = 21 - 19 \text{ (1) بالتعويض في (1)}$$

$$\text{النتيجة هي } (19, 21)$$

$$9 = 24 \text{ } [27 - 24] \times 9 = 24$$

$$24 = 24 + 24 \quad (19)$$

$$24 = 24 + 19 \Leftrightarrow 24 = 24 + 1 + 27 + 1$$

$$(1) \quad 24 = 27 + 1$$

$$\text{النتيجة هي } (24, 27)$$

$$(2) \text{ و (1) } (2) \quad 24 = 24 + 1$$

$$2 = 2 \text{ } 24 = 2$$

$$\text{النتيجة هي } (24, 27)$$

$$[2(1-u) + 19] \frac{2}{3} = 24$$

$$24 = [2(24 + 24 + 24) + 19] \frac{2}{3}$$

$$[2(1-u) + 19] \frac{2}{3} = 24 \quad (20)$$

$$[2(19 + 19) + 19] \frac{2}{3} = 24$$

$$24 + 19 = 24 \Leftrightarrow [2(19 + 19) + 19] \frac{2}{3} = 24$$

$$1 = 24 - 19 + 19 \Leftrightarrow 1 = 24 - 19 + 19$$

$$24 - 19 = 24 \Leftrightarrow 1 = (24 + 19)(2 - u)$$

$$2(1-u) + 19 = 24 \quad (21)$$

$$2(1-u) + 19 = 24$$

$$(2 + 1) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2 + 1 = 24 - 19 = 2(1-u)$$

$$(24 - 1) \times \frac{2}{3} = 19 \Leftrightarrow (24 - 19) \frac{2}{3} = 19$$

$$(1) \Leftrightarrow 24 = 19 \quad (2) \Leftrightarrow 24 = 19$$

$$2 = 2 \text{ } 24 = 24$$

$$\text{النتيجة هي } (24, 19)$$

$$24 = 24 \text{ } 24 = 24 \text{ } 24 = 24 \quad (22)$$

$$24 = [24 + 24] \frac{2}{3}$$

$$24 = 24$$

$$24 = 24 \times \frac{2}{3}$$

$$2 = 2 \text{ } 24 = 24 + 24$$

$$24 + 24 = 24$$

$$\text{النتيجة هي } (24, 24)$$

$$24 = 24 \text{ } 24 = 24 \text{ } 24 = 24 \quad (23)$$

$$24 = [24 - 19] \frac{2}{3}$$

$$24 = 24$$

$$24 = 24 \times \frac{2}{3}$$

$$24 = 24$$

$$24 = 24 + 1$$

$$24 + 1 = 24$$

$$24 = 24 + 19$$

$$\frac{24 - 19}{2} = 2$$

$$24 = 24 + 19$$

$$\text{النتيجة هي } (24, 19)$$

$$24 = 24$$

$$2 + 24 = 24 \text{ } 24 = 2 - 24 \text{ } 2 - 24 = 24 \Leftrightarrow 24 = 2 + 1 \quad (24)$$

$$[2 + 1] \frac{2}{3} = 24$$

$$[2 + 24 + 2 - 24] \frac{2}{3} = 24$$

$$24 = 24 \text{ } 24 = 24 \Leftrightarrow [24 + 19] \frac{2}{3} = 24$$

$$2 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2 - 24 + 1 \quad (25)$$

$$[2(1-u) + 19] \frac{2}{3} = 24$$

$$1 = (2 + 19) \times 2 \text{ } 24 = [24 + 19] \frac{2}{3}$$

$$\text{النتيجة هي } (24, 24)$$

$$[2(1-u) + 19] \frac{2}{3} = 24$$



$$(1) \Rightarrow 28 = 27 + 1 \Rightarrow 28 = 1 \text{ (2)}$$

$$(17 + 1) = (21 + 2) \frac{8}{7} = (17) \text{ هي (الأولى)}$$

$$[17 + 1] \frac{8}{7} = (17) \text{ هي (الثانية)}$$

$$[17 + 1 + 1 + 1] \frac{8}{7} =$$

$$[17 + 1] = (17) \frac{8}{7} =$$

$$\frac{1}{7} = \frac{27+1}{27+1} \Rightarrow \frac{1}{7} = \frac{(27+1)8}{(27+1)8}$$

$$(2) \Rightarrow 27 = 27 - 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (3)}$$

$$1 = 27 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (4)}$$

$$(17) \text{ هي (الأولى)}$$

$$(17) \text{ هي (الثانية)}$$

$$(17) \text{ هي (الثالثة)}$$

$$(17) \text{ هي (الرابعة)}$$

$$(17) \text{ هي (الخامسة)}$$

$$(17) \text{ هي (السادسة)}$$

$$(17) \text{ هي (السابعة)}$$

$$(17) \text{ هي (الثامنة)}$$

$$(17) \text{ هي (التاسعة)}$$

$$(17) \text{ هي (العاشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الحادي عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الثاني عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الثالث عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الرابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الخامس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السادس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الرابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الخامس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السادس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الرابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الخامس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السادس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الرابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الخامس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السادس عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (السابع عشر)}$$

$$(17) \text{ هي (الرابع عشر)}$$

$$(1) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (2)}$$

$$(2) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (3)}$$

$$(1) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (4)}$$

$$(2) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (5)}$$

$$(3) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (6)}$$

$$(4) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (7)}$$

$$(5) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (8)}$$

$$(6) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (9)}$$

$$(7) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (10)}$$

$$(8) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (11)}$$

$$(9) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (12)}$$

$$(10) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (13)}$$

$$(11) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (14)}$$

$$(12) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (15)}$$

$$(13) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (16)}$$

$$(14) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (17)}$$

$$(15) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (18)}$$

$$(16) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (19)}$$

$$(17) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (20)}$$

$$(18) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (21)}$$

$$(19) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (22)}$$

$$(20) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (23)}$$

$$(21) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (24)}$$

$$(22) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (25)}$$

$$(23) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (26)}$$

$$(24) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (27)}$$

$$(25) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (28)}$$

$$(26) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (29)}$$

$$(27) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (30)}$$

$$(28) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (31)}$$

$$(29) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (32)}$$

$$(30) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (33)}$$

$$(31) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (34)}$$

$$(32) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (35)}$$

$$(33) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (36)}$$

$$(34) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (37)}$$

$$(35) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (38)}$$

$$(36) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (39)}$$

$$(37) \Rightarrow 27 = 27 + 1 \Rightarrow 27 = 1 \text{ (40)}$$







$$[2 - u^2 + 1 + u] \frac{u}{4} = u^2$$

$$u + u^2 = u^2 \quad \Rightarrow \quad (u + u^2)u = u^2$$

$$(u - u^2) \frac{1}{4} = u \quad \Rightarrow \quad u - u^2 = 4u$$

③ من المتتابعة الحسابية بالة من الترميز الثانية في

$$\frac{u + u^2}{u(1 + u^2)} = \frac{u}{u} \times \frac{1 + u^2}{1 + u^2} = \frac{u}{u}$$

$$1 - u = u$$

$$[1 - u + (1 - u)^2] - u + u^2 =$$

$$[1 - u + 1 + u^2 - 2u] - u + u^2 =$$

$$[2 + u^2 - 2u] - u + u^2 =$$

$$2 - u + u^2 - u + u^2 =$$

$$2 - u + u^2$$

$$1 - u = u$$

$$[(1 - u) + (1 - u)^2] - u + u^2 =$$

$$[1 - u + 1 + u^2 - 2u] - u + u^2 =$$

$$2 + u^2 - 2u - u + u^2 =$$

$$2 + u^2 - u$$

$$\frac{(1 - u^2)^2}{(1 + u^2)^2} = \frac{u^2}{u^2}$$

$$\frac{v}{8} = \frac{70}{78} = \frac{1 - 12 \times 7}{1 + 12 \times 7} = \frac{11}{78}$$

$$⑤ \quad [2(1 - u) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[u^2 + 1 + u^2] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[2(1 - u^2) + 1 + u + 1] \frac{u}{4} =$$

$$[2 - 2u^2 + 1 + u + 1] \frac{u}{4} =$$

$$⑥ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[u^2 + 1 + u^2] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[2(1 - u^2) + 1 + 2(1 - 1 + u^2) + 1] \frac{u}{4} =$$

$$⑦ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} =$$

$$[2(1 - u^2) + 1] \frac{u^2}{4} = u^2$$

$$⑧ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} \times 3 =$$

$$1 - u = u$$

$$1 - u = u$$

$$⑨ \quad 2(1 - u) + 1 = u^2$$

$$(1) \quad u = 2(1 - u) + 1$$

$$2(1 - u^2) + 1 = u^2$$

$$⑩ \quad [2(1 - u^2) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$u - u^2 = 2 + u - 2 - 2u^2$$

$$u^2 = 2u \quad \Rightarrow \quad u = 2$$

$$u = (2 - 1)(1 - u) + 1$$

$$2 - u = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 1$$

$$[2(1 - u) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[(2 - 1)(1 - u^2) + (2 - u^2)] \frac{u^2}{4} = u^2$$

$$[2 + u^2 - u^2] \frac{u^2}{4} = u^2$$

$$[2 - u - 1] \frac{u^2}{4} = u^2$$

$$u^2 - u^2 = u^2$$

$$u^2 = u^2$$

$$u = (2 - u)(1 + u)$$

$$u = 2$$

$$u = 2$$

⑪ أولاً، أوجد الأول  $u$  من الأوساط الحسابية،

بالتحديد الأخير

$$\therefore \text{الوسط الأول} = 1 + 2 \quad \text{الوسط الأخير} = u - 2$$

$$[1 + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[u + 1] \frac{u}{4} = [2 - u + 2 + 1] \frac{u}{4} =$$

ثانياً، أوجد (وسط حسابي)  $u$

بفرض أن الأسس  $u$

$$\therefore \text{الوسط الأول} = 1 + 2 \quad \text{الوسط الأخير} = u - 2$$

$$[1 + 1] \frac{u}{4} = [2 - u + 2 + 1] \frac{u}{4} =$$

$$[u + 1] \frac{u}{4} = [2 - u + 2 + 1] \frac{u}{4} =$$

$$[u + 1] \frac{u}{4} = [2 - u + 2 + 1] \frac{u}{4} =$$

$$u = 2$$

$$1 + u^2 = 1$$

$$2 = (1 + u^2) - 2 + u^2 = 2$$

$$[2(1 - u) + 1] \frac{u}{4} = u^2$$

$$[(2 - 1)(1 - u) + 2 + u^2] \frac{u}{4} = u^2$$



$$[1 - u^2 + u^3 - u^4]d = u^3(1-u)d - u^4d =$$

$$u^3 - u^2 = 1 - u^2 \Rightarrow u^3 = 1$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3 \quad (1)$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 1(1-u) + 12$$

$$[1(1-u^2) + 12] \frac{u^2}{4} = u^3$$

$$[1(1-u^2) + 12] u = u^3$$

$$(2) \Rightarrow 1 = 1(1-u^2) + 12 \quad \text{بطرح (1) من (2)}$$

$$1 - u^2 = 1 \Rightarrow 1 = 1 - u^2$$

$$[1(1-u^4) + 12] \frac{u^4}{4} = u^3$$

$$[1 - 1 + 12] u^2 =$$

$$[1 + 12] u^2 =$$

$$[1 + 12] u^2 = 1(1-u) + 12 \quad \text{من (1) من (2)}$$

$$13u^2 = (1-u) + 12 \Rightarrow 13u^2 = 13 - u$$

$$u^2 - u + 1 = 0$$

$$1(1-u) + 1 = 1 \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow 1 = 1(1-u) + 1$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = u^3$$

$$(1) \Rightarrow 1(1-u) + 12 = u^3$$

$$1(1-u) + 12 = (1+1)1$$

$$1(1-u) + 12 = 1 + 1$$

$$13 = u^3 \Rightarrow u = 13$$

$$1(1-u) = 13$$

$$(1) \Rightarrow \text{عدد الحدود زوجي} \Rightarrow \text{نظر من أن عدد الحدود 9}$$

$$\Rightarrow \text{الحدان الأوسطان هما } u^5 \text{ و } u^4$$

$$1(1-u) + 1 = 1$$

$$(1) \Rightarrow 1(1-u) + 1 = 13$$

$$1(1-u) + 1 = 13$$

$$1(1-u) + 12 = 13$$

$$[1(1-u^2) + 12] \frac{u^2}{4} = u^3$$

$$13 = u^3 \Rightarrow u = 13$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحدود 9} \Rightarrow 13 = 13 \Rightarrow 13 = 13 \Rightarrow 13 = 13 \Rightarrow 13 = 13$$

$$\begin{cases} 11 + 1 = 12, 6 \\ 11 + 1 = 12 \end{cases} \quad \text{بالطرح}$$

$$1 - u = 1 \Rightarrow 1, 6 = 1$$

$$\Rightarrow \text{الحد الأخير } 1, 6$$

$$12, 6 = 1 \Rightarrow 1, 6 = 13 + 1 - 1 = 13 + 1 = 14$$

$$(1) \Rightarrow 1 + u^2 = 14 \quad \text{اقتطاعه من (1)}$$

$$u^2 = \text{عدد الحدود}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{[1(1-u) + 12] \frac{u}{4}}{[12(1-u^2) + 12] \frac{u^2}{4}} = \frac{1}{u^2}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1 + u}{1 + u^2} \Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1 + u}{1 + u^2}$$

$$12 = u^2 \Rightarrow 1 + u + 12 = u^2 + 12$$

$$13 = u^2 \Rightarrow \text{عدد الحدود } 13$$

$$13 = 13 = 13 \quad (1)$$

$$13 = 1 + 12 = 13 \Rightarrow 13 = 13 + 12 = 25$$

$$\text{اقتطاعه من (1)}$$

$$u^2 = \text{عدد الحدود}$$

$$\text{مجموع الثلاثة الأخير } 13 = \text{مجموع الثلاثة الأول}$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1(1-u) + 12}{1(1-u^2) + 12} = \frac{1}{u^2}$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = 1$$

$$[1(1-u) + 12] \frac{u}{4} = 1$$

$$13 = u^2 \Rightarrow 13 = 13$$

$$13 = u^2 \Rightarrow 13 = 13$$

$$\Rightarrow \text{عدد الحدود } 13$$

$$(1) \Rightarrow 13 = 13 = 13$$

$$13 = 13 = 13$$

$$13 = 13 = 13$$

$$13 = 13 = 13$$

$$\Rightarrow (13 = 13 = 13) \Rightarrow \text{اقتطاعه من (1)}$$

$$13 = 13 = 13$$

$$13 = 13 = 13$$

$$13 = 13 = 13$$

$$13 = 13 = 13$$











$$\frac{7}{8} = f \therefore 7 = 8f \text{ د } 99 = f \therefore \frac{1}{9} = f$$

$$(\dots, 196, 37, \frac{7}{8}) \text{ د } (\dots, 196, 18, 99)$$

$$7 = 8f + f \Leftrightarrow (\dots, 196, 19, f) \quad (1)$$

$$10 = 8f + f + 1 \Leftrightarrow$$

$$10 = f \Leftrightarrow 10 = 8f + 1 \therefore$$

$$\frac{17}{4} = \frac{38}{18} = 8f + f + 1 \Leftrightarrow 10 = (8f + f + 1)f$$

$$0 = (1 - 8f)(1 + f) \Leftrightarrow 0 = 1 - 8f + 8f^2$$

$$\frac{1}{8} = f \text{ د } \frac{5}{8} = f$$

$$(\dots, 10, 10, 10) \quad (\dots, 18, 17, 10)$$

$$1 \Leftrightarrow 1 = (f + 1)f \therefore 1 = f + f^2 \quad (2)$$

$$1 + 788 = (f + 1)^2 f \therefore 788 = 8f + 8f^2$$

$$787 = 8f \therefore \text{بقسمة (2) على (1)}$$

$$f = 1 \therefore 787 = 8 \text{ بالتقريب في (1)}$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, 17, 16, 17)$$

$$1 \Leftrightarrow 19 = (1 - f)f \Leftrightarrow 19 = f - f^2 \quad (3)$$

$$19 \Leftrightarrow 18 = (1 - f)f \Leftrightarrow 18 = f - f^2$$

$$f = \frac{18}{19} = \frac{(1 - f)f}{(1 - f)f} \Leftrightarrow \text{بقسمة (3) على (4)}$$

$$\frac{1}{19} = f \therefore \frac{1}{19} = f$$

$$19 = (\frac{1}{19} - \frac{1}{19})f \quad (5) \text{ بالتقريب في (3)}$$

$$192 = f \therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, 18, 17, 16, 17, 18)$$

$$1 \Leftrightarrow 15 = 8f \Leftrightarrow 15 = 8f^2 \Leftrightarrow 15 = (8f)f \quad (6)$$

$$19 \Leftrightarrow 19 = (1 - 8f)f \Leftrightarrow 19 = f - 8f^2$$

$$19f = \frac{(1 - 8f)f}{(8f)f} \Leftrightarrow \text{بقسمة (6) على (7)}$$

$$\frac{1}{19} = 1 - 8f \therefore f = \frac{1}{19} \therefore 19 = 8f \Leftrightarrow 19 = 1 - 8f$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19})$$

$$(\dots, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19})$$

$$1 \Leftrightarrow 8 = f \quad (8)$$

$$f(\frac{1}{8}) = \frac{1}{8} = 8f = \frac{1}{8} \therefore$$

$$10 = 1 \text{ د } \frac{1}{8} = f \therefore$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, \frac{8}{9}, 10, 10)$$

$$1 > 1 - u(\frac{1}{8}) = 779 \Leftrightarrow 1 > 1 - u \quad (9)$$

$$\frac{1}{8} > 1 - u(\frac{1}{8}) \Leftrightarrow$$

$$7 > 1 - u \Leftrightarrow 7 > 1 + u \Leftrightarrow 6 > 1 + u \Leftrightarrow 5 > u \Leftrightarrow 4$$

$$A = u \therefore 4 < u \therefore$$

$$(7) \Leftrightarrow 71 = 8f \text{ د } (1) \Leftrightarrow 8 = 8f \quad (10)$$

$$7 = 8f \therefore 8 = 8f \therefore (1) \text{ على (7)}$$

$$f = 1 \therefore (1)$$

$$\therefore \text{المتتابعة الهندسية هي } (\dots, 1, 1, 1)$$

$$(7) \Leftrightarrow 781 = 8f \text{ د } (1) \Leftrightarrow 12 = 8f \quad (11)$$

$$7 = 8f \therefore 12 = 8f \therefore \text{بقسمة (11) على (7)}$$

$$f = 1 \therefore (1)$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, 12, 12, 12)$$

$$(7) \Leftrightarrow \frac{1}{8} = 8f \text{ د } (1) \Leftrightarrow \frac{1}{8} = f \quad (12)$$

$$\frac{1}{8} = 8f \text{ د } (1) \text{ على (7)}$$

$$\frac{1}{8} = f \therefore \frac{1}{8} = f$$

$$\frac{1}{8} = 1 \therefore \frac{1}{8} = 1 \therefore (1)$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$$

$$\frac{1}{8} = 8f \Leftrightarrow 1 = 8f \Leftrightarrow 1 = 8f^2 \quad (13)$$

$$\frac{1}{8} = 8f \Leftrightarrow \frac{1}{8} = 8f^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} = (8f)f$$

$$19 = 8f + f \therefore 19 = 8f + 8f^2$$

$$19 = 8(\frac{1}{8}) + \frac{1}{8} = 1$$

$$19 = 1 \therefore 19 = 1 \therefore \frac{9}{11}$$

$$\therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, 19, 19, 19)$$

$$198 = 8f \Leftrightarrow 18 = 8f \Leftrightarrow 18 = 8f \Leftrightarrow \frac{1}{8} = f \quad (14)$$

$$198 = 8f \therefore 18 = 8f \therefore \text{المتتابعة هي } (\dots, 18, 18, 18)$$

$$19 = 8f + f \quad (15) \Leftrightarrow 19 = 8f^2$$

$$19 = (8f + 1)f \Leftrightarrow$$

$$19 = 8f^2 + f \Leftrightarrow \frac{19}{8} = \frac{f^2}{1} = \frac{(8f + 1)^2}{8f}$$

$$0 = (9 - f)(1 - 8f) \Leftrightarrow 0 = 9 - 8f - 8f^2$$



$$\textcircled{1} \Rightarrow 19A = (x^2 + x + 1)^2 x^2$$

$$A = \frac{19A}{19} = \frac{(x^2 + x + 1)^2 x^2}{(x^2 + x + 1)^2} \quad \textcircled{1} \text{ بقسمة } \textcircled{1} \text{ على } 19$$

$\textcircled{1} \Rightarrow x = y$  بالتعويض عن  $x$  في  $\textcircled{1}$

$$19 = (x^2 + x + 1)^2 \Rightarrow$$

$\therefore$  القسمة هي  $(x^2 + x + 1)^2$   $\therefore x = 1$

(1)  $17 = (x^2 + 1)x^2 \Rightarrow x^2 + 1 = \frac{17}{x^2} \Rightarrow x^4 + x^2 - 17 = 0$   $\textcircled{1}$

(2)  $17 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{17}$   $\therefore x^2 = 17$   $\therefore x = \pm \sqrt{17}$

بإدخال القيمتين (1) في المعادلة

$$\frac{17}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} \Rightarrow \frac{17}{x^2} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$$

$$17 = x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+64}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{65}}{2} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{2}$$

$\therefore x = \frac{-1 + \sqrt{65}}{2}$  و  $x = \frac{-1 - \sqrt{65}}{2}$

$$1 = 0 \Rightarrow 1 + 0 = 1 \Rightarrow \frac{1+0}{1} = \frac{0}{1} \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{y+x}{1+x} \Rightarrow 1+x = y+x \Rightarrow 1 = y$$

$$(1+x)(1+x) = (1-x)(1+x) \Rightarrow 1+x^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = -x^2 \Rightarrow x = 0$$

$\therefore x = 0$   $\therefore y = 1$   $\therefore x = 0$   $\therefore y = 1$

$\therefore x = 0$   $\therefore y = 1$   $\therefore x = 0$   $\therefore y = 1$

$$\textcircled{3} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\textcircled{4} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$1 = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$x = x^2 + x \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$1 = (x^2 + x)(x^2 + x) \Rightarrow 1 = x^4 + 2x^3 + x^2$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

$$19 = 1 + 18 \Rightarrow 19 = 1 + 18$$

$$19 = 1 + 18 \Rightarrow 19 = 1 + 18$$

$$19 = 1 + 18 \Rightarrow 19 = 1 + 18$$

$$19 = 1 + 18 \Rightarrow 19 = 1 + 18$$

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5$$

$$19 = 1 + 18 \Rightarrow 19 = 1 + 18$$

$$19 = 1 + 18 \Rightarrow 19 = 1 + 18$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 19 = (x^2 + 1)x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$19 = x^4 + x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$19 = x^4 + x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$\frac{19}{x^2} = \frac{x^4 + x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{19}{x^2} = x^2 + 1$$

$$19 = x^4 + x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$19 = x^4 + x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$19 = x^4 + x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$19 = x^4 + x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$19 = x^4 + x^2 \Rightarrow 19 = x^4 + x^2$$

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 19 = (1 - x^2)x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 19 = (1 - x^2)x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 19 = (1 - x^2)x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$19 = x^4 - x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$19 = x^4 - x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$19 = x^4 - x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$19 = x^4 - x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$(1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 5$$

$$19 = x^4 - x^2 \Rightarrow 19 = x^4 - x^2$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 19 = (x^2 + x + 1)x^2$$

$$19 = x^4 + x^3 + x^2$$











$$\left[ (1 \times (1-19) + 19 \times 1) \right] \frac{19}{1} = 18$$

هـ ١٩ = ٧٣٩      هـ ١٩ = ٧٣٩

$$\sqrt{20 \times 1} \cdot 2 = 20 \Rightarrow 10 = 20 \times 1 = 20 \quad (1) \quad (2)$$

$$10 = 20 \quad \text{d} \quad 10 = 20 \quad \text{d} \quad 10 = 20$$

$$\sqrt{781} \cdot 2 = 782 = 19 \times 19 = 19^2 \quad (3)$$

$$781 = 782 \quad \text{d} \quad 781 = 782$$

$$781 = 782 \quad (4)$$

$$(19 \times 19 \times 19 \times 19)$$

$$19 = 19 \quad (5)$$

$$(19 \times 19 \times 19 \times 19)$$

$$19 = 19 \quad (6)$$

$$(19 \times 19 \times 19 \times 19)$$

$$\frac{19}{1} = 19 \quad (7)$$

$$\frac{19}{1} = 19 \quad (8)$$

$$\frac{19}{1} = 19 \quad (9)$$

$$\left( \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1} \right)$$

$$19 \times 19 \quad (10)$$

$$19 \times 19 \quad (11)$$

$$19 \times 19 \quad (12)$$

$$19 \times 19 \quad (13)$$

$$19 \times 19 \quad (14)$$

$$19 \times 19 \quad (15)$$

$$19 \times 19 \quad (16)$$

$$19 \times 19 \quad (17)$$

$$19 \times 19 \quad (18)$$

$$19 \times 19 \quad (19)$$

$$19 \times 19 \quad (20)$$

$$19 \times 19 \quad (21)$$

$$19 \times 19 \quad (22)$$

$$19 \times 19 \quad (23)$$

$$19 \times 19 \quad (24)$$

$$19 \times 19 \quad (25)$$

$$19 \times 19 \quad (26)$$

$$19 \times 19 \quad (27)$$

$$19 \times 19 \quad (28)$$

$$19 \times 19 \quad (29)$$

$$19 \times 19 \quad (30)$$

$$19 \times 19 \quad (31)$$

$$19 \times 19 \quad (32)$$

$$19 \times 19 \quad (33)$$

$$19 \times 19 \quad (34)$$

$$19 \times 19 \quad (35)$$

$$19 \times 19 \quad (36)$$

$$19 \times 19 \quad (37)$$

$$19 \times 19 \quad (38)$$

$$19 \times 19 \quad (39)$$

$$19 \times 19 \quad (40)$$

$$19 \times 19 \quad (41)$$

$$19 \times 19 \quad (42)$$

$$19 \times 19 \quad (43)$$

$$19 \times 19 \quad (44)$$

$$19 \times 19 \quad (45)$$

$$19 \times 19 \quad (46)$$

$$19 \times 19 \quad (47)$$

$$19 \times 19 \quad (48)$$

$$19 \times 19 \quad (49)$$

$$19 \times 19 \quad (50)$$

$$19 \times 19 \quad (51)$$

$$19 \times 19 \quad (52)$$

$$19 \times 19 \quad (53)$$

$$19 \times 19 \quad (54)$$















①:  $\frac{a+b}{2}$  وسط هندسي بين  $a$  و  $b$ .

والوسط الحسابي بين  $a$  و  $b$  هو  $\frac{a+b}{2}$ .

②: الوسط الحسابي < الوسط الهندسي

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \quad (1)$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \quad (2)$$

بالمثل هو وسط هندسي بين  $a$  و  $b$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \quad (3)$$

بجمع (1) و (2)

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} + \sqrt{ab} < a+b$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (4)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (5)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (6)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (7)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (8)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (9)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (10)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (11)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (12)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (13)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (14)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (15)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (16)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (17)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (18)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (19)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (20)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (21)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (22)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (23)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (24)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (25)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (26)$$

$$\frac{a+b}{2} < a+b \quad (27)$$

$$(a+b) + \frac{a+b}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(1) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(2) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$\frac{2 \times \frac{a+b}{2}}{(a+b)} + \frac{2 \times \frac{a+b}{2}}{(a+b)} = \frac{a}{a} + \frac{b}{b} = 2$$

$$2 = \frac{a+b}{a+b} = 2 = \left[ \frac{a}{a} + \frac{b}{b} \right] = 2$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$(a+b) + \frac{a+b}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(1) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(2) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$2 = \frac{a+b}{a+b} = 2 = \left[ \frac{a}{a} + \frac{b}{b} \right] = 2$$

$$2 = \frac{a+b}{a+b} = 2 = \left[ \frac{a}{a} + \frac{b}{b} \right] = 2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = 1$$

③: نفرض أن الأعداد هي:

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$$

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$$

$$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$$

$$(a+b) + \frac{a+b}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(1) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(2) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$(a+b) + \frac{a+b}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(1) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(2) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$2 = \frac{a+b}{a+b} = 2 = \left[ \frac{a}{a} + \frac{b}{b} \right] = 2$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$(a+b) + \frac{a+b}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$

$$(1) \quad \frac{(a+b)}{2} = \frac{3(a+b)}{2}$$







$$\frac{1}{x} = y \quad ; \quad y = \frac{1}{x} \quad ; \quad 1 = \frac{1}{y} \quad (1)$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{11} \quad ; \quad y = 11$$

$$\frac{y}{11} = \frac{1 - \frac{1}{y} \times \frac{1}{11}}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{1 - \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}} = 1$$

$$y = 11 \quad (1) \quad (2)$$

$$y = 11 \quad (3) \quad (4)$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1 - \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{y}} = 1$$

$$11 \times \frac{1}{y} = \frac{1}{y} - 11$$

$$1 - 11 \times \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \quad ; \quad 1 - 11 \times \frac{1}{y} = \frac{1}{y}$$

$$A = 11 \quad ; \quad y = 1 - 11 \times \frac{1}{y} = 1 - 11 \times \frac{1}{11} = 0$$

$$(1) \rightarrow y = 11 \quad ; \quad (2) \rightarrow y = 11$$

$$y = 11 \quad (3)$$

$$(1) \rightarrow y = 11 \quad ; \quad (2) \rightarrow y = 11$$

$$(1) \rightarrow y = 11 \quad ; \quad (2) \rightarrow y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$1 < \frac{1}{y} < \frac{1}{11} \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$

$$y = 11 \quad ; \quad y = 11$$



$$189 = \frac{(1-2^7)3}{1-2} = 3 \text{ هـ.} \quad \text{①}$$

$$A) = 2 \text{ هـ.} \quad 12 = 2^3 \times 3 = 2 \times 3 \times 2 = 1 \text{ هـ.} \quad 1-2 = 2 \text{ هـ.} \quad \text{②}$$

$$3 = 2 \text{ هـ.} \quad 189 \times 3 = 2^3 \times 3 = 2 \times 3 \times 2 = 1 \text{ هـ.}$$

$$19819 = \frac{2^7 - 2 \times 19819}{1-2} = \frac{1-2^7}{1-2} = 3 \text{ هـ.}$$

$$2-100 \times 2 \times 10 = \frac{2-100 \times 2 \times 10}{2-100 \times 2 \times 10} = \frac{100 \times 2}{100} \quad \text{③}$$

∴ (2) متتابعة هندسية

$$2 = 2 \quad 0 = 2^{-1}(2) \times 10 = 1 \text{ هـ.}$$

$$20000 = \frac{(1-2^7)10}{1-2} \quad \frac{(1-2^7)10}{1-2} = 20000$$

$$019 = 1 + \frac{10000}{2} = 5000$$

$$9 = 5000 \quad 9 = 5000$$

$$15 = 2 \text{ هـ.} \quad 15 = 2^3 - 2^2 = 12 \times 1 = 1 \text{ هـ.} \quad 1 = 1 \text{ هـ.} \quad \text{④}$$

$$99 = 2^3 - 2^2 = 12 \times 1 = 1 \text{ هـ.} \quad 9 = 1 \text{ هـ.}$$

$$27 = 2 \text{ هـ.} \quad 99 = 2^3 + 2^2 = 12 \times 1 = 1 \text{ هـ.}$$

$$117 = 2^3 - 2^2 = 12 \times 1 = 1 \text{ هـ.} \quad 2 = 1 \text{ هـ.}$$

$$9 = 2^3 + 2^2 + 2^1 = 12 \times 1 = 1 \text{ هـ.}$$

$$9 = 12 \times 1 = 1 \text{ هـ.}$$

∴ المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$1 = 1 \left(\frac{1}{12}\right) 9 = 2^3 \times 1 = 2 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2, 78 = \frac{(1-2^7)1}{1-2} \quad \frac{(1-2^7)1}{1-2} = 78 \quad \text{⑤}$$

$$(2) = 78 = \frac{(1-2^7)2}{1-2} \quad \frac{(1-2^7)2}{1-2} = 78$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 78 = \frac{78}{2} = 39 \text{ هـ.} \quad (1) \text{ هـ.}$$

من (1) ∴  $\frac{1}{2} = 1 \text{ هـ.}$  ∴ المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$\frac{(1-2^7)1}{1-2} = 78 \quad \frac{(1-2^7)1}{1-2} = 78 \quad \text{⑥}$$

$$2 = 1 \text{ هـ.} \quad 121 = 12$$

∴ العدد الذي بدأ به هو 12

$$\text{⑦} = 192 = 2^7 \times 3 \quad \text{⑧} = 96 = 2^5 \times 3$$

$$2 = 2 \text{ هـ.} \quad 8 = 2^3 \text{ هـ.} \quad \text{⑨}$$

المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$983.1 = \frac{(1-2^7)3}{1-2} = 3 \text{ هـ.}$$

$$(1) = 2 = 2 \text{ هـ.} \quad 9 = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑩}$$

$$9 = 1 - 2^3 \times 1 = 1 \text{ هـ.}$$

$$(2) = 9 = (1 - 2^3) \times 1 \text{ هـ.}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{2}{(1-2^3)} \quad \frac{9}{2} = \frac{2}{(1-2^3)}$$

$$1 = 2 - 2^3 - 2^3 \times 2 = 2 - 2^3 \times 2 = 2$$

$$0 = (2 - 2^3) \times (1 + 2^3)$$

$$2 = \frac{2}{2} = 1 \text{ هـ.} \quad 1 = 2 \text{ هـ.}$$

المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$12280 = \frac{(1-2^7)2}{1-2} = 12$$

$$\text{⑪} = \frac{1}{2} = 2 \text{ هـ.} \quad 1 = 2^3 \times 1 = 2 \text{ هـ.} \quad 1 = 2^3 \times 1 = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑫}$$

$$\frac{1}{2} = 2 \text{ هـ.} \quad \frac{1}{2} = 2 \text{ هـ.}$$

$$\frac{(1-2^7)1}{1-2} = 92$$

$$\text{⑬} = (1 - 2^3) \times 1 = 92 - 2^3 \times 1 = 92$$

$$(1 - 2^3 \times \frac{1}{2}) \times 1 = 92 - \frac{1}{2} \times 92 = 92 \text{ هـ.}$$

$$88 = 1 \text{ هـ.} \quad \frac{78}{2} = \frac{92}{2} = 46 \text{ هـ.} \quad \frac{78}{2} = \frac{92}{2}$$

∴ المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$9 = 2 \text{ هـ.} \quad 1 = 2^3 \times 1 = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑭}$$

$$\text{⑮} = 9 = (1 - 2^3) \times 1 \text{ هـ.}$$

$$1 = 2 - 2^3 - 2^3 \times 2 = 2 - 2^3 \times 2 = 2$$

$$0 = (2 - 2^3) \times (1 + 2^3)$$

بالفرض في ⑮

$$2 = 1 \text{ هـ.} \quad 9 = (1 - 2^3) \times 2 \times 1 \text{ هـ.}$$

∴ المتتابعة هي (1, 12, 144, ...)

$$2 = \frac{100 \times 2}{100} = 2 \text{ هـ.} \quad 100 \times 2 = 100 \times 2 = 2 \text{ هـ.} \quad \text{⑯}$$

$$\frac{(1-2^7)1}{1-2} = 78 \text{ هـ.}$$



$$x = y = z = 1 \quad (28)$$

$$18 = 1 - x^2 = y^2 \quad \& \quad 7 = 1 - x^2 = z^2$$

المتكافئة هي (18, 7, 1)

$$x = \frac{(1-y^2)z}{1-y} \quad \& \quad \frac{(1-x^2)z}{1-x} = y$$

$$x < 1 - y^2 \quad \& \quad x < 1 - x^2$$

$$x < 1 - y^2 \quad \& \quad x < 1 - x^2$$

$$x < 1 - y^2 \quad \& \quad x < 1 - x^2$$

$$\frac{1}{x} = y \quad \& \quad \frac{1}{y} = x \quad (29)$$

$$\frac{1-y}{x} = \frac{1-x}{y} \quad \& \quad \frac{1-y}{x} = \frac{1-x}{y}$$

$$\frac{1-y}{x} = \frac{1-x}{y}$$

$$y^2 - y = x^2 - x$$

$$\frac{1}{x} = y \quad \& \quad \frac{1}{y} = x$$

$$1 - x^2 = y^2 \quad \& \quad 1 - y^2 = x^2$$

$$1 - x^2 = y^2 \quad \& \quad 1 - y^2 = x^2$$

$$x = y \quad \& \quad y = x$$

عدد الحدود = 4

$$① = 11 = \frac{(1-x^2)y}{1-x} \quad (30)$$

$$② = 7 = \frac{(1-x^2)y}{1-x}$$

بمقدار ② على ①

$$x = \frac{7}{11} = \frac{1-y}{1-x} = \frac{(1-x^2)y}{1-x}$$

$$x = \frac{7}{11} \quad \& \quad y = \frac{7}{11}$$

المتكافئة هي (18, 7, 1)

$$① = 1 - 18 = 1 \quad \& \quad 18 = 1 - 1 = 1 \quad (31)$$

ب 18 = 1 والتعويض من ①

$$1 - 18 = 1 - 1 = 1 \quad \& \quad 18 = 1 - 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad \& \quad 18 = 1 \quad \& \quad 18 = 1$$

المتكافئة هي (18, 7, 1)

المتكافئة هي (18, 7, 1)

$$x = \frac{(1-y^2)z}{1-y} = \frac{(1-x^2)z}{1-x}$$

$$\frac{1}{x} = y = z = 1 \quad (32)$$

المتكافئة هي (18, 7, 1)

$$1 > \frac{1}{x} = y = z$$

لا يمكن جمع عدد لا نهائي من الحدود

$$\frac{1}{x} = y = z = 1$$

$$1 = \frac{1}{x} = y = z$$

$$x = y = z = 1 \quad (33)$$

المتكافئة هي (18, 7, 1)

$$① = 11 = \frac{(1-x^2)y}{1-x} \quad (34)$$

بمقدار ① على ②

$$1 = \frac{1}{x} = y = z$$

$$1 = \frac{1}{x} = y = z$$

$$x = y = z = 1$$

$$x = y = z = 1$$

$$\frac{1}{x} = y = z = 1$$

$$x = y = z = 1$$

المتكافئة هي (18, 7, 1)

$$x = y = z = 1 \quad (35)$$

$$x = y = z = 1$$

$$① = 11 = \frac{(1-x^2)y}{1-x} \quad (36)$$

$$\frac{1}{x} = y = z = 1$$

$$\frac{1}{x} = y = z = 1$$

$$x = y = z = 1$$

$$① = 11 = \frac{(1-x^2)y}{1-x} \quad (37)$$

$$\frac{1}{x} = y = z = 1$$

$$\frac{1}{x} = y = z = 1$$

$$x = y = z = 1$$



$$r = r^2 \quad (24)$$

$$\frac{1}{81} = r^4 \quad \therefore$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^4} = r^3 \quad \therefore$$

بحل المعادلتين

$$\frac{1}{r} = r^3$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين  $27 = 1 \quad \therefore$

النتيجة هي (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

$\therefore |r| = \frac{1}{3} > 1$  يمكن جمع هذه غير ملته من حدودا للنتيجة

$$1 - r = \frac{27}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{r - 1} = \infty$$

$$1 = r^3 \quad \therefore r = 1 \quad (25)$$

$$1 = \frac{1}{r^4} = r^4 \quad \therefore r = 1$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^4} = r^3 \quad \therefore \text{بقسمة (25) على (1)}$$

$$\frac{1}{r} = r^3 \quad \therefore \text{بالتعويض في (1)} \quad 27 = 1 \quad \therefore$$

النتيجة هي (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

$$1 - r = \frac{27}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{r - 1} = \infty$$

$$1 = r^3 \quad \therefore r = 1$$

$$1 = r^4 \quad \therefore r = 1$$

$$(1) = 1 = (r^3 - 1)r$$

$$(2) = 18 = \frac{(1 - r^4)r}{1 - r} = 18 = 1$$

$$1 = \frac{18}{18} = \frac{1}{r \times (1 - r)} \quad \therefore \text{بقسمة (2) على (1)}$$

$$1 = (1 - r^4)(1 - r^3) \quad \therefore 1 = 1 - r^4 - r^3 + r^7$$

$$99 = 1 \quad \therefore \frac{1}{r} = r^3$$

النتيجة هي (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

$\therefore r > 1$  يمكن إيجاد  $\therefore$

$$192 = \frac{99}{\frac{1}{3} - 1} = \infty$$

$$(1) = 28 = (r^2 + 1)r \quad \therefore 28 = r^3 + r$$

$$(2) = 12 = (r + 1)r \quad \therefore 12 = r^2 + r$$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{12}{28} = \frac{(r + 1)r}{(r^2 + r - 1)(r + 1)r}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{r}{r^2 + r - 1}$$

$$1 = 6 + r^2 + r^3 = r^3 + r^2 + r + 6 = r^3 + r^2 + r + 6$$

$$1 = (r^2 + r + 6)(r + 1)$$

$$\frac{r}{r} = r \quad \therefore \frac{r}{r} = r$$

النتيجة هي (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

$$32.5 = \frac{192}{\frac{1}{3} - 1} = \infty$$

$$(1) = 1 = \frac{r}{r - 1} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r - 1} = \infty \quad \therefore$$

$$(2) = 1 = (r - 1)r \quad \therefore$$

$$1 = r^2 - r$$

$$r = r^2 \quad (24)$$

$$\frac{1}{81} = r^4 \quad \therefore$$

$$\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^4} = r^3 \quad \therefore$$

بحل المعادلتين

$$\frac{1}{r} = r^3$$

بالتعويض في إحدى المعادلتين  $27 = 1 \quad \therefore$

النتيجة هي (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

$\therefore |r| = \frac{1}{3} > 1$  يمكن جمع هذه غير ملته من حدودا للنتيجة

$$1 - r = \frac{27}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{1}{r - 1} = \infty$$

$$r = r^2 - 1 \quad \therefore$$

$$r = r^2 - 1 \quad (25)$$

$$\frac{12}{r} = \infty \quad \therefore$$

$$(1) = r = (r - 1)r$$

$$(2) = \frac{12}{r} = \frac{1}{r - 1} \quad \therefore$$

$$(2) = \frac{12}{r} = \frac{1}{r - 1} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = r - 1 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{r} = r - 1$$

$$\frac{r}{r} = r - 1 \quad \therefore$$

$$\frac{r}{r} = r - 1$$

$$\frac{r}{r} = r \quad \therefore$$

$$\frac{r}{r} = r$$

$$1 = 1 \quad \therefore$$

بالتعويض في (1)

النتيجة هي (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

$$r = r^2 + 1 \quad \therefore$$

$$r = r^2 + 1 \quad (26)$$

$$(1) = r = (r^2 + 1)r$$

$$r = r^3 + r$$

$$r = r^3 + r$$

$$(2) = r = (r + 1)r$$

بقسمة (1) على (2)

$$\frac{r}{r} = \frac{(r^3 + r - 1)(r + 1)}{(r + 1)r}$$

$$\frac{r}{r} = \frac{(r^3 + r - 1)}{(r + 1)r}$$

$$\frac{r}{r} = \frac{r^3 + r - 1}{r}$$

$$1 = 6 + r^2 + r^3 = r^3 + r^2 + r + 6$$

$$r = r^3 + r^2 + r + 6$$

$$1 = (r^2 + r + 6)(r + 1)$$

$$1 = 1 \quad \therefore$$

$$\frac{r}{r} = r$$

النتيجة الأولى (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

النتيجة الثانية (24, 27, 81, ...)  $\therefore$

$\therefore$  توجد مكتابتان

والنتيجة الثانية يمكن جمع حدودها إلى  $\infty$  لأن  $r > 1$

$$192 = \frac{99}{\frac{1}{3} - 1} = \infty$$











$$|1-u+1)^{1/2} \rangle_{\mathcal{H}} = (1-u+1+1+1)^{1/2} \rangle_{\mathcal{H}} = 1$$

$$(v) = \frac{(1-v)}{1} \cdot (v)^v(1) = v$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ direction}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{[3(\frac{1}{3})-1]}{\frac{1}{3}-1} = \frac{[4(\frac{1}{4})-1]}{\frac{1}{4}-1} = 2 \therefore$$

1. Identify the main idea

$$(7) \quad \frac{1-u}{(1-u)^{1-u} u^u} = 2$$

$$u \left( \frac{(1-v)^{1-u}}{(1-v^u)} \right) = \frac{(1-v^u)^{1-u}}{1-v} = v \left( \frac{1-v}{1-v^u} \right)$$

$$(1-u)u_p u^p |_{\pi} u(1+u_p^p |_{\pi}) \pi$$

$$v_{\text{eff}} = v\left(\frac{1-u^2}{1-u^2}, u\right) = v\left(\frac{u}{1-u^2}\right) \therefore$$

(٢) لولا، المستطابان في = من & ع، = من : من م

الوسطان الهندسيان  $\mu_1$  و  $\mu_2$

١٨٨٧

$$(1) \quad \psi_A = (\rho + 1) \rho u -$$

تاريخياً، الوسطان الحسنيين هي  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  هي - و

$$V = J + J^2 + J + J^2$$

$$FV = FV_0 + \frac{FV_0}{1 + r} + \frac{FV_0}{(1 + r)^2} + \dots + \frac{FV_0}{(1 + r)^{n-1}}$$

$$\text{مقدار } (1) \Rightarrow \quad \nabla V = (\nabla_V + 1)u$$

$$\frac{1A}{1V} = \frac{(v+1)u}{(1+u-\frac{1}{v})(v+1)u}$$

$$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - \sqrt{2} \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{2}}$$

$$1 = (1 + y)(1 - y^2) \Rightarrow 1 = 1 + y - y^2 - y^3$$

1000

Figure	Figure
--------	--------

**TU = TE + TNS + TSC**

1 = 2. 3 = 4. 5 = 6. 7 = 8. 9 = 10. 11 = 12. 13 = 14. 15 = 16. 17 = 18. 19 = 20. 21 = 22. 23 = 24. 25 = 26. 27 = 28. 29 = 30. 31 = 32. 33 = 34. 35 = 36. 37 = 38. 39 = 40. 41 = 42. 43 = 44. 45 = 46. 47 = 48. 49 = 50. 51 = 52. 53 = 54. 55 = 56. 57 = 58. 59 = 60. 61 = 62. 63 = 64. 65 = 66. 67 = 68. 69 = 70. 71 = 72. 73 = 74. 75 = 76. 77 = 78. 79 = 80. 81 = 82. 83 = 84. 85 = 86. 87 = 88. 89 = 90. 91 = 92. 93 = 94. 95 = 96. 97 = 98. 99 = 100. 101 = 102. 103 = 104. 105 = 106. 107 = 108. 109 = 110. 111 = 112. 113 = 114. 115 = 116. 117 = 118. 119 = 120. 121 = 122. 123 = 124. 125 = 126. 127 = 128. 129 = 130. 131 = 132. 133 = 134. 135 = 136. 137 = 138. 139 = 140. 141 = 142. 143 = 144. 145 = 146. 147 = 148. 149 = 150. 151 = 152. 153 = 154. 155 = 156. 157 = 158. 159 = 160. 161 = 162. 163 = 164. 165 = 166. 167 = 168. 169 = 170. 171 = 172. 173 = 174. 175 = 176. 177 = 178. 179 = 180. 181 = 182. 183 = 184. 185 = 186. 187 = 188. 189 = 190. 191 = 192. 193 = 194. 195 = 196. 197 = 198. 199 = 200. 201 = 202. 203 = 204. 205 = 206. 207 = 208. 209 = 210. 211 = 212. 213 = 214. 215 = 216. 217 = 218. 219 = 220. 221 = 222. 223 = 224. 225 = 226. 227 = 228. 229 = 230. 231 = 232. 233 = 234. 235 = 236. 237 = 238. 239 = 240. 241 = 242. 243 = 244. 245 = 246. 247 = 248. 249 = 250. 251 = 252. 253 = 254. 255 = 256. 257 = 258. 259 = 260. 261 = 262. 263 = 264. 265 = 266. 267 = 268. 269 = 270. 271 = 272. 273 = 274. 275 = 276. 277 = 278. 279 = 280. 281 = 282. 283 = 284. 285 = 286. 287 = 288. 289 = 290. 291 = 292. 293 = 294. 295 = 296. 297 = 298. 299 = 300. 301 = 302. 303 = 304. 305 = 306. 307 = 308. 309 = 310. 311 = 312. 313 = 314. 315 = 316. 317 = 318. 319 = 320. 321 = 322. 323 = 324. 325 = 326. 327 = 328. 329 = 330. 331 = 332. 333 = 334. 335 = 336. 337 = 338. 339 = 340. 341 = 342. 343 = 344. 345 = 346. 347 = 348. 349 = 350. 351 = 352. 353 = 354. 355 = 356. 357 = 358. 359 = 360. 361 = 362. 363 = 364. 365 = 366. 367 = 368. 369 = 370. 371 = 372. 373 = 374. 375 = 376. 377 = 378. 379 = 380. 381 = 382. 383 = 384. 385 = 386. 387 = 388. 389 = 390. 391 = 392. 393 = 394. 395 = 396. 397 = 398. 399 = 400. 401 = 402. 403 = 404. 405 = 406. 407 = 408. 409 = 410. 411 = 412. 413 = 414. 415 = 416. 417 = 418. 419 = 420. 421 = 422. 423 = 424. 425 = 426. 427 = 428. 429 = 430. 431 = 432. 433 = 434. 435 = 436. 437 = 438. 439 = 440. 441 = 442. 443 = 444. 445 = 446. 447 = 448. 449 = 450. 451 = 452. 453 = 454. 455 = 456. 457 = 458. 459 = 460. 461 = 462. 463 = 464. 465 = 466. 467 = 468. 469 = 470. 471 = 472. 473 = 474. 475 = 476. 477 = 478. 479 = 480. 481 = 482. 483 = 484. 485 = 486. 487 = 488. 489 = 490. 491 = 492. 493 = 494. 495 = 496. 497 = 498. 499 = 500. 501 = 502. 503 = 504. 505 = 506. 507 = 508. 509 = 510. 511 = 512. 513 = 514. 515 = 516. 517 = 518. 519 = 520. 521 = 522. 523 = 524. 525 = 526. 527 = 528. 529 = 530. 531 = 532. 533 = 534. 535 = 536. 537 = 538. 539 = 540. 541 = 542. 543 = 544. 545 = 546. 547 = 548. 549 = 550. 551 = 552. 553 = 554. 555 = 556. 557 = 558. 559 = 560. 561 = 562. 563 = 564. 565 = 566. 567 = 568. 569 = 570. 571 = 572. 573 = 574. 575 = 576. 577 = 578. 579 = 580. 581 = 582. 583 = 584. 585 = 586. 587 = 588. 589 = 590. 591 = 592. 593 = 594. 595 = 596. 597 = 598. 599 = 600. 601 = 602. 603 = 604. 605 = 606. 607 = 608. 609 = 610. 611 = 612. 613 = 614. 615 = 616. 617 = 618. 619 = 620. 621 = 622. 623 = 624. 625 = 626. 627 = 628. 629 = 630. 631 = 632. 633 = 634. 635 = 636. 637 = 638. 639 = 640. 641 = 642. 643 = 644. 645 = 646. 647 = 648. 649 = 650. 651 = 652. 653 = 654. 655 = 656. 657 = 658. 659 = 660. 661 = 662. 663 = 664. 665 = 666. 667 = 668. 669 = 670. 671 = 672. 673 = 674. 675 = 676. 677 = 678. 679 = 680. 681 = 682. 683 = 684. 685 = 686. 687 = 688. 689 = 690. 691 = 692. 693 = 694. 695 = 696. 697 = 698. 699 = 700. 701 = 702. 703 = 704. 705 = 706. 707 = 708. 709 = 710. 711 = 712. 713 = 714. 715 = 716. 717 = 718. 719 = 720. 721 = 722. 723 = 724. 725 = 726. 727 = 728. 729 = 730. 731 = 732. 733 = 734. 735 = 736. 737 = 738. 739 = 740. 741 = 742. 743 = 744. 745 = 746. 747 = 748. 749 = 750. 751 = 752. 753 = 754. 755 = 756. 757 = 758. 759 = 760. 761 = 762. 763 = 764. 765 = 766. 767 = 768. 769 = 770. 771 = 772. 773 = 774. 775 = 776. 777 = 778. 779 = 780. 781 = 782. 783 = 784. 785 = 786. 787 = 788. 789 = 790. 791 = 792. 793 = 794. 795 = 796. 797 = 798. 799 = 800. 801 = 802. 803 = 804. 805 = 806. 807 = 808. 809 = 810. 811 = 812. 813 = 814. 815 = 816. 817 = 818. 819 = 820. 821 = 822. 823 = 824. 825 = 826. 827 = 828. 829 = 830. 831 = 832. 833 = 834. 835 = 836. 837 = 838. 839 = 840. 84



$$A_1 = 1 - 2P = 2 \quad ; \quad 1 = 17 \times 1 - 1P = 2 \quad \textcircled{2}$$

$$P = 2 \quad ; \quad 1 = 17 \times 1P = 1 - 1P = 2 \quad \textcircled{3}$$

$$V = 1 + 1 - 1 = 1$$

$$11011 = \frac{17 \times 17 - 17 - 17}{2-1} = \frac{17 \times 17 - 1}{2-1} = 17$$

$$6A = \frac{1}{2-1} \quad \Rightarrow \quad 6A = 1 \quad \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow (2-1)6A = 1 \quad ; \quad 17 = 17$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 17 = 17$$

$$17 + 17 = 2(2-1)6A \quad ; \quad 1 = 17 \times 1 - 17$$

$$1 = 17 \times 1 - 17$$

$$1 = 1 + 17 - 17 \times 1$$

$$1 = (1-17)(1-17)$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{1}{17} = 17 \quad \text{بالنقص في} \quad \textcircled{7}$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$17 = 17 \quad ; \quad 17 = \frac{1}{17} \times 17$$

$$V_1 = 17A = 1 - V_1 \quad \textcircled{1}$$

$$A = 0 \quad ; \quad V = 1 - 0$$

$$\left( \dots, \left( \frac{1}{17} \right), \left( \frac{1}{17} \right), \left( \frac{1}{17} \right) \right) \quad \textcircled{2}$$

$$\frac{\frac{1}{17}}{\left( \frac{1}{17} \right) - 1} = \frac{1}{2-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{1}{17} \right) = 17 \times \frac{1}{17} = 1$$

$$\frac{17}{17} = \frac{17}{17} \times \frac{1}{17} = \frac{17}{17} = \frac{17}{17} = 1$$

$$\text{المتابعة هي } (\dots, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}) \quad \textcircled{3}$$

$$\left( \dots, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17} \right) \text{ متتابعة الخواص هي } \left( \dots, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17} \right)$$

$$\frac{(1-17)}{1-17} = 1$$

$$\left[ \frac{1-17}{1-17} \right] \frac{1}{1-17} = \left[ \frac{1-17}{1-17} \right] \frac{1}{1-17}$$

$$\frac{1}{1-17} = \frac{1}{1-17} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1-17} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1-17}$$

$$\left( \dots, \frac{1}{17}, \frac{1}{17}, \frac{1}{17} \right) \quad \textcircled{4}$$

$$\frac{V\left(\frac{1}{17}\right) - 1}{\frac{1}{17} - 1} = \frac{1 - V\left(\frac{1}{17}\right)}{1 - \frac{1}{17}} = \frac{(1-17)}{1-17} = 1$$

$$(1) \quad \left[ V\left(\frac{1}{17}\right) - 1 \right] 2 =$$

$$\frac{V\left(\frac{1}{17}\right) - 1}{\left(\frac{1}{17}\right) - 1} = 1$$

U عدد زوجي

$$1 - \frac{1}{17} = \left[ V\left(\frac{1}{17}\right) - 1 \right] 2 \times \frac{1}{17} = \frac{V\left(\frac{1}{17}\right) - 1}{\frac{1}{17}} = 1$$

$$1 - \frac{1}{17} = 1 - \frac{1}{17}$$

$$1 - V\left(\frac{1}{17}\right) = 1 - V\left(\frac{1}{17}\right)$$

$$1 - V\left(\frac{1}{17}\right) = 1 - V\left(\frac{1}{17}\right)$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$1 = 1 - V(1-1) = \frac{1}{17}$$

$$17 \textcircled{1} \quad 17 \textcircled{2} \quad 17 \textcircled{3}$$

$$17 \times 17 \textcircled{4} \quad 17 \times 17 \textcircled{5} \quad 17 \times 17 \textcircled{6}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{7} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{8} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{9}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{10} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{11} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{12}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{13} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{14} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{15}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{16} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{17} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{18}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{19} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{20} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{21}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{22} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{23} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{24}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{25} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{26} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{27}$$

$$17 \times 17 \times 17 \textcircled{28} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{29} \quad 17 \times 17 \times 17 \textcircled{30}$$



٢٣) هناك عدد ٩ حالات لطرق توزيع الرقمين ٨ و ٥ وهي  
 هذه الحالات التي يمكن أن توزع بها العددين ٨ و ٥ على  
 الحالات الأربع هي :

	أحادي	عشرات	مئات	آلاف
١	٨	.	.	.
٢	٨	.	.	.
٣	.	٨	.	.
٤	.	٨	.	.
٥	.	.	٨	.
٦	.	.	٨	.
٧	.	.	.	٨
٨	.	.	.	٨
٩	.	.	.	٨

وعلى وضع الرقمين تصبح الحالة الثانية لها ٦ طرق اختيار ٨  
 أرقام بعد اختيار الرقمين ٨ و ٥ والحالة الأخيرة لها ٦ طرق  
 اختيار ٧ أرقام بعد طرق ٣ حالات ويكون عدد الأرقام

المختلفة التي يمكن تكوينها

$$9 \times (7 \times 8 \times 1 = 1) = 72$$

٢٤) في الحالة الأولى = ٦ اختيارات

في الحالة الثانية = ٣ اختيارات فقط

وبذلك لأن لم تكن في الحالة الأولى ولم تزد في حالتها رقم  
 زوجي والعكس

في الحالة الثالثة = ٢ اختيار

من الأرقام المتبقية للحالة الثانية

في الحالة الرابعة = اختيار

من الأرقام المتبقية للحالة الثالثة

في الحالة الخامسة = اختيار واحد فقط

$$\text{عدد الطرق} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ طريقة}$$

٢٥) الحالة الأولى = ٥ طرق

لأن العدد زوجي (الاختيارات ٨ و ٥ و ٤ و ٣ و ٢ و ١)

الحالة الثانية = ٦ طرق ٥ الحالة الثالثة = ٦ طرق

الحالة الرابعة = ٦ طرق

لأن العدد يجب أن يكون أقل من ٧٠٠٠

فالأرقام المحتملة هي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

ويستثنى من الإعداد العدد ١٠٠٠ لأنه ليس ضمن الفترة المحددة

$$\text{عدد الطرق الممكنة} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ طريقة}$$

٢٦) الأعداد

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880 \text{ طريقة}$$

٢٧) الأولى الثانية الثالثة الرابعة الخامسة

٢ ٥ ٤ ٣ ٢

$$\text{عدد الطرق} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد الطرق} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362880 \text{ طريقة}$$

٢٨) عدد طرق اختيار الحروف الأبجدية

$$26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^{10} \text{ طريقة}$$

عدد طرق اختيار الأرقام

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880 \text{ طريقة}$$

عدد طرق الاختيار الكلية

$$26^{10} \times 362880 = 50118720000 \text{ طريقة}$$

٢٩) عدد التبديلات الممكنة لنتائجها

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد اختيارات المطالبات المعكبة} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720 \text{ طريقة}$$

$$\text{عدد طرق اختيار الحالة الثالثة} = 3 \text{ طرق}$$

حيث لا يمكن اختيار العدد ٩

عدد طرق اختيار الحالة الأولى = ٣ طرق

عدد طرق اختيار الحالة الثانية = ٢ طريقة

$$\text{عدد طرق الاختيار} = 3 \times 2 \times 3 \times 1 = 18 \text{ طريقة}$$

٣٠) عدد طرق الاختيار =

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362880 \text{ طريقة}$$



(ماد ٩١) من مصروف الخط - كتهاد إلى

- ١) (٩١) قرابية  
٢) ٩١  
٣) ٨٠  
٤)  $\frac{1}{4}$

(٥) عدد الأعداد، الكثرة من أربعة أرقام مختلفة

$$٩١ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ =$$

(٦) نفرض أن العددين هما ٤ و ٥

$$٢٠ = ٤ \times ٥$$

$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠ \quad ١ = ٤ \times ٥$$

الوسط الهندسي = ٨

$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠ \quad ١ = ٤ \times ٥$$

بالتعويض من ١ إلى ٧

$$٢٠ = (٢٠ - ٤) \times ٤$$

$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠$$

$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠$$

$$(٢٠ - ٤) \times ٤ = ٢٠$$

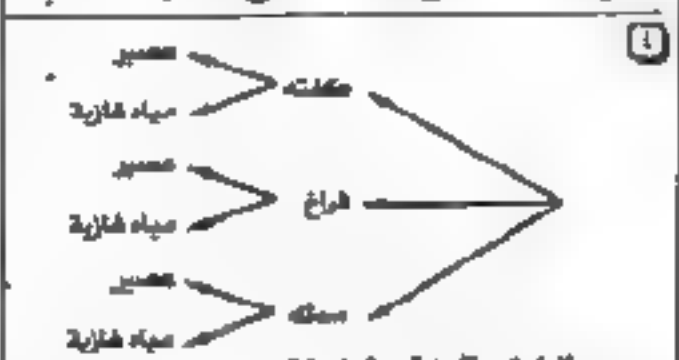
$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠ \quad ١ = ٤ \times ٥$$

$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠ \quad ١ = ٤ \times ٥$$

$$٢٠ = ٤ \times ٥ = ٢٠$$

١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١
١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١
١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١
١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١

١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١
١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١
١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١
١) ٩١	٢) ٩١	٣) ٩١	٤) ٩١



عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة



عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة

عدد الطرق = ٢ × ٣ = ٦ طريقة



$$12 = u^2 \quad (1)$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = u$$

$$6 = u^2 \quad \quad \quad 3 = u$$

$$8 \times 9 \times 10 = u^2 \quad \quad \quad 720 = u^2 \quad (2)$$

$$7 = u^2 \quad \quad \quad 7 \times 12 = u^2$$

$$2 + u = 7 + u \quad (3)$$

$$2 + u \mid (7 + u) = 7 + u \quad (4)$$

$$1 = u^2 \quad \quad \quad 7 + u = 7$$

$$12 = u \mid (1 + u) \quad (5)$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 1 + u$$

$$7 = u^2 \quad \quad \quad 1 = 1 + u^2 \quad \quad \quad 1 = 1 + u$$

$$81 = \frac{u(1+u)(1+u)}{u} \quad \quad \quad 81 = \frac{1+u}{u} \quad (6)$$

$$81 = (1+u)(1+u)$$

$$1 = 81 - u^2 + u^2$$

$$1 = 81 - 2 + u^2 + u^2$$

$$1 = (9 - u)(9 + u)$$

$$7 = u \mid (9 - u)(9 + u) = u^2$$

$$\frac{7+u}{7} = \frac{1}{1+u} + \frac{1}{u} \quad (7)$$

$$\frac{7+u}{7} = \frac{1}{u(1+u)} + \frac{1}{u}$$

$$\frac{7+u}{7} = \frac{7+u}{1+u} \quad \quad \quad \frac{7+u}{7} = \frac{1+1+u}{u(1+u)}$$

$$1 = 1 + u \quad \quad \quad 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = 1 + u$$

$$7 = u^2 \quad \quad \quad 1 = 1 + u$$

$$(2 \times \text{الطرفين}) \quad \quad \quad 12 = 1 - u^2 \mid u \quad (8)$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = u^2 \quad \quad \quad 12 = 1 - u^2 \mid u$$

$$7 = u^2 \quad \quad \quad 1 = u^2 \quad \quad \quad 1 = u^2 \mid$$

$$7 \times 12 = 84 = 7 \times 12 = 7 \times 12 \quad (9)$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 = u \quad \quad \quad 7 = u^2$$

$$1 = u^2 \quad \quad \quad 1 = u$$

$$1 = 1 \mid 2 = 1 \mid 3 = u$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 = u \quad (10)$$

$$8 = u^2 \quad \quad \quad 8 = u$$

$$120 = u^2 \quad \quad \quad 120 = u^2$$

$$8 = u^2 \quad \quad \quad 8 \times 12 = 96 = 8 \times 12 = 8 \times 12$$

$$1 = 1 = 8 - 8 = 8 - u$$

$$1 = u \quad (11)$$

$$1 = u \mid \text{مكرر} = u$$

$$12 = u^2 \mid$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = u$$

$$1 = u$$

$$1 = u$$

$$12 = 12 - u \quad (12)$$

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 =$$

$$8 = 12 - u$$

$$7 = u^2$$

$$8 = 12 - u$$

$$8 = \frac{u(1+u)}{u} \quad \quad \quad 8 = \frac{1+u}{u} \quad (13)$$

$$1 = u^2 \quad \quad \quad 8 = 1 + u^2$$

$$12 = \frac{1-u \mid u(1+u)}{1-u} \quad \quad \quad 12 = \frac{1+u}{1-u} \quad (14)$$

$$12 = (1+u)u$$

$$1 = (1-u)(7+u)$$

$$1 = 12 - u^2 + u^2$$

$$7 = u^2 \quad \quad \quad 7 = u^2 \mid (7 - u)(7 + u) = u^2$$

$$7 \times 12 = 84 = 7 \times 12 \quad \quad \quad 120 = u^2 \quad (15)$$

$$7 = u^2$$

$$7 \times 12 = 84 = 7 \times 12 = 7 \times 12 \quad \quad \quad 12 \times 12 = u^2 \quad (16)$$

$$7 = u^2$$

$$1 = 1 = 7 = 7 \times 12 \quad \quad \quad 7 \times 12 = u^2 \quad (17)$$

$$1 = u^2 \quad \quad \quad 7 \times 12 = 7 \times 12$$

$$7 \times 12 = 84 = 7 \times 12 = 7 \times 12 \quad \quad \quad 120 = 7 \times 12 \quad (18)$$

$$12 = u^2 \quad \quad \quad 12 = 7 + u$$

$$1 = 7 \times 12 + 7 \times 12 \quad (19)$$

$$7 = u^2 \quad \quad \quad 1 = u + 1$$

$$8 = 7 \times 12 + 7 \times 12 + 7 \times 12 \quad (20)$$

$$8 = (1-u)u + u + 1$$

$$1 = 12 - u^2 \quad \quad \quad 1 = 8 - 1 + u - u^2 + u$$

$$7 = u^2 \quad \quad \quad 12 = u^2$$















$$A = 1 \times 1 = VT = \gamma^2 u^2 + r$$

$$\gamma^2 u^2 = \gamma^2 u^2 + r$$

$$V = r \quad \leftarrow \quad 1 = r + r$$

$$r = \gamma^2 u^2 = r + u^2 \Rightarrow u = r u^2$$

$$\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2 = \gamma^2 u^2 \quad (1)$$

$$\frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} + \frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} = r$$

$$\frac{1 + \gamma^2 - u}{1} + \frac{1}{1 + \gamma^2 - u} = r$$

$$\frac{1 - u}{1} + \frac{1}{1 - u} = r$$

$$(1 - u)(1 - u) + 1 \times 1 = (1 - u)r$$

$$1 - 2u + u^2 - r + 1 = 1 - u$$

$$1 = r + r + u^2 - r + 1$$

$$1 = (r + u)(1 - u)$$

$$r = u \quad \text{d} \quad 1 = u$$

$$\frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} = \frac{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2} \quad (2)$$

$$\frac{r - 1}{1 + r} = \frac{1 + 1 - r - 1}{1 + r} = \frac{1 + (1 + r) - 1}{1 + r} =$$

$$\frac{A}{11} = \frac{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2 + \gamma^2 u^2} \quad (3)$$

$$\frac{A}{11} = \frac{\gamma^2 u^2}{\gamma^2 u^2} = \frac{1 + \frac{1 - r}{1}}{\frac{1}{1 + r} + 1} \quad \leftarrow \quad \frac{A}{11} = \frac{1 + \frac{1 - r}{1}}{\frac{1}{1 + r} + 1}$$

$$\frac{A}{11} = \frac{\gamma^2 + \gamma - \gamma^2}{1 + \gamma^2} \quad \leftarrow \quad \frac{A}{11} = \frac{\gamma^2 + (1 - \gamma^2)\gamma}{1 + \gamma^2}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\gamma^2 + \gamma}{1 + \gamma^2} \quad \leftarrow \quad \frac{A}{11} = \frac{\gamma^2 + \gamma^2}{1 + \gamma^2}$$

$$1 + \gamma^2 = \gamma^2 + \gamma^2$$

$$1 = \gamma^2 - \gamma^2 + \gamma^2$$

$$1 = (\gamma^2 - \gamma^2)(1 + \gamma^2)$$

$$(\text{مرفوض}) \quad \frac{1}{\gamma} = \gamma$$

$$r = \gamma \quad \leftarrow \quad 1 = \gamma$$

$$\frac{1 - u}{1 - \gamma - u} = \frac{u}{1 - \gamma - u} = \gamma^2 u^2 - u^2 = \gamma^2 u^2 \quad (4)$$

$$\frac{u}{1 + \gamma} = \frac{1 - \gamma - u}{1 - u} = \frac{1 - u}{1 - \gamma - u} \cdot \frac{u}{1 + \gamma} =$$

$$1 - \gamma^2 - u \times 1 = \gamma^2 u^2 \times \gamma \quad (5)$$

$$\frac{r}{1} = \frac{1}{1} = \frac{\gamma^2 u^2}{1 - \gamma^2 - u}$$

$$\frac{r}{1} = \frac{1 - u}{1 - \gamma - u} + \frac{u}{1 - \gamma - u}$$

$$\frac{r}{1} = \frac{\gamma - u}{1 - u} = \frac{1 - u}{1 - \gamma - u} \cdot \frac{u}{1 + \gamma}$$

$$\gamma^2 u^2 = 1 \quad \frac{r}{1} = \frac{u}{1}$$

$$1 - \gamma^2 - u \times 1 = 1 - \gamma^2 - u = 1$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1 - \gamma^2 - u}{1 - \gamma^2 - u}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1 - u}{1 - \gamma - u} + \frac{1 - u}{1 - \gamma - u}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{\gamma - u}{1 - u} = \frac{1 - u}{1 - \gamma - u} \cdot \frac{u}{1 + \gamma}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma} \quad \leftarrow \quad \frac{1}{1} = \frac{1 - u}{1 - \gamma}$$

$$1 - \gamma^2 = 1 - \gamma^2$$

$$1 = u \quad \leftarrow \quad 0 = \gamma$$

$$1 = 1 + 0 = \gamma + u$$

$$1 - \gamma^2 > \gamma^2 \quad (6)$$

$$1 > \frac{1 + \gamma - 1}{\gamma} \quad \leftarrow \quad 1 > \frac{\gamma^2}{1 - \gamma^2} \quad \therefore$$

$$\gamma > 1 + \gamma - 1$$

$$\frac{11}{\gamma} < \gamma \quad \leftarrow \quad 11 < \gamma^2$$

$$11 \geq \gamma^2 \quad \leftarrow \quad 1 \leq \gamma$$

$$1 \geq \gamma \geq 1$$

$$1 \leq \gamma \leq 1 \leq \gamma$$

$$1 = 1 + 1 + 1 + \gamma + \gamma = \gamma^2 + \gamma^2$$

$$\gamma = \frac{\gamma^2}{1} = \gamma^2 \quad (7)$$

$$\gamma = u \quad \leftarrow \quad \gamma^2 = 1 + \gamma^2 = \gamma^2$$



نظرياً أن عدد عناصر المجموعة  $M = 2^n$

∴ عناصر  $M$  تمثل جميع الأزواج المكونة من المجموعة  $M$

∴ عدد عناصر  $M = 2^n$

$$2^n = 2^n \quad \therefore 2^n = 2^n \quad \therefore 2^n = 2^n$$

∴ عناصر المجموعة  $M$  تمثل جميع المجموعات الجزئية

المتناهية من المجموعة  $M$

$$2^n = 2^n = 2^n$$

$$\frac{u}{v|v-u} < \frac{u}{A|A-u} \quad \therefore \quad v|v-u < A|A-u \quad (29)$$

$$\frac{v|v-u}{v|v-u} < \frac{A|A-u}{v|v-u}$$

$$1 < v \dots \quad A < v-u \therefore \quad \frac{1}{v-u} < \frac{1}{A}$$

$$v < v \therefore \quad 1 < v^2 \quad (30)$$

$$v < v \therefore \quad 1 < v^2$$

$$v = v \therefore \quad v > v > 0$$

$$1 = \frac{1}{v} = \frac{1-v}{v} = \frac{1}{v}$$

$$v + u + v = v \quad \therefore \quad v = v \quad (31)$$

$$(1+u)(v+u) = \frac{(1-u)v}{1 \times 2} + \frac{(v-u)(1-u)v}{1 \times 2 \times 2}$$

$$(1+u)(v+u) = (1 + \frac{v-u}{2}) \frac{(1-u)v}{2}$$

$$(1+u)(v+u) = (\frac{2+v-u}{2}) \frac{(1-u)v}{2}$$

$$(1+u)(v+u) = \frac{(1+u)}{2} = \frac{(1-u)v}{2}$$

$$v = v - u - u - v \therefore \quad v + u = (1-u)v$$

$$v = (v+u)(1-u) \therefore \quad v = v - u - u - v$$

$$v = v - u - u - v \quad (مرفوض)$$

$$1:2 = v^2 + u \therefore \quad v^2 + u = 1:2 \quad (32)$$

$$v = \frac{1}{v^2 + u} = v^2 + u$$

$$v = v \therefore \quad v = 1 \times v = v$$

$$v = v \therefore \quad v = v + v$$

$$\frac{v}{v} = v + v \therefore$$

$$\frac{v}{v} = \frac{v|v-u}{v|v-u} = \frac{v}{v|v-u}$$

$$\frac{v}{v} = \frac{v|v-u}{v|v-u} = \frac{1}{v|v-u}$$

$$v = v \therefore \quad v = v - u \therefore \quad \frac{v}{v} = \frac{v-u}{v}$$

$$v^2 + u + v \quad (33)$$

$$\frac{1-v|v-u}{1-v} = \frac{v}{v|v-u}$$

$$\frac{v}{v} = \frac{1-v|v-u}{1-v} = \frac{v}{v|v-u}$$











$$\begin{aligned} \therefore \text{م (2)} &= 4 - 4 + 4 \times 4 = 12 \\ \text{معدل التغير} &= \frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{12 - 0}{3 - 0} = 4 \\ \text{معدل التغير} &= 4 \end{aligned}$$

١٩: مساحة سطح الكرة  $\pi r^2$  هي

$$\begin{aligned} \text{معدل تغير مساحة السطح} &= \frac{\text{نهاية م} - \text{البداية م}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} \\ &= \frac{\pi(4)^2 - \pi(2)^2}{4 - 2} = \frac{16\pi - 4\pi}{2} = 6\pi \\ \text{نهاية م} &= \pi(4)^2 = 16\pi \\ \text{نهاية س} &= 4 \\ \text{بداية م} &= \pi(2)^2 = 4\pi \\ \text{بداية س} &= 2 \\ \text{معدل التغير} &= \frac{16\pi - 4\pi}{4 - 2} = 6\pi \end{aligned}$$

٢٠: من المسألة السابقة م (1)  $\pi(1) + \pi(1) = \pi(2)$

$$\pi(1) = \pi(2) - \pi(1) = \pi(2) - \pi(1)$$

عندما يزداد طول نصف القطر من 1 إلى 2،

$$\text{معدل التغير في المساحة} = \frac{\pi(2)^2 - \pi(1)^2}{2 - 1} = \frac{4\pi - \pi}{1} = 3\pi$$

٢١: د (س) = س

$$\begin{aligned} \text{م (د)} &= \frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1 \\ \text{معدل التغير} &= \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1 \end{aligned}$$

معدل التغير = نهاية م (د) = نهاية م (س) = 1

٢٢: المساحة الكلية م = س

متوسط التغير في المساحة الكلية

$$\text{م (د)} = \frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1$$

$$\text{نهاية م} = \frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1$$

عندما س = 2، د = 2

لأن م (د) = 1،  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = 1$

معدل التغير في المساحة الكلية = نهاية م (د) = 1

$$\text{نهاية م} = \frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1$$

$$\text{نهاية م} = \frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{2 - 1}{2 - 1} = 1$$

٢٣: نفرض أن طول نصف قطر الكرة = س

حجم الكرة =  $\frac{4}{3}\pi s^3$

د (س) =  $\frac{4}{3}\pi s^3$

د (س + 1) =  $\frac{4}{3}\pi (س + 1)^3$

م (د) =  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi (س + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi س^3}{(س + 1) - س} = \frac{4\pi (س^3 + 3س^2 + 3س + 1 - س^3)}{1} = 4\pi (3س^2 + 3س + 1)$

م (د) =  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi (س + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi س^3}{(س + 1) - س} = \frac{4\pi (س^3 + 3س^2 + 3س + 1 - س^3)}{1} = 4\pi (3س^2 + 3س + 1)$

م (د) =  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi (س + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi س^3}{(س + 1) - س} = \frac{4\pi (س^3 + 3س^2 + 3س + 1 - س^3)}{1} = 4\pi (3س^2 + 3س + 1)$

معدل التغير = نهاية م (د)

نهاية م (د) =  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{\frac{4}{3}\pi (س + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi س^3}{(س + 1) - س} = \frac{4\pi (س^3 + 3س^2 + 3س + 1 - س^3)}{1} = 4\pi (3س^2 + 3س + 1)$

عندما س = 1، م (د) =  $\frac{4}{3}\pi (1 + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi (1)^3 = \frac{4}{3}\pi (8 - 1) = \frac{28}{3}\pi$

عندما س = 2، م (د) =  $\frac{4}{3}\pi (2 + 1)^3 - \frac{4}{3}\pi (2)^3 = \frac{4}{3}\pi (27 - 8) = \frac{40}{3}\pi$

معدل التغير =  $\frac{\frac{40}{3}\pi - \frac{28}{3}\pi}{2 - 1} = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$

٢٤: نفرض أن طول نصف قطر الكرة = س

مساحة سطح الكرة =  $4\pi s^2$

د (س) =  $4\pi s^2$

د (س + 1) =  $4\pi (س + 1)^2$

م (د) =  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi (س + 1)^2 - 4\pi س^2}{(س + 1) - س} = \frac{4\pi (س^2 + 2س + 1 - س^2)}{1} = 4\pi (2س + 1)$

م (د) =  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi (س + 1)^2 - 4\pi س^2}{(س + 1) - س} = \frac{4\pi (س^2 + 2س + 1 - س^2)}{1} = 4\pi (2س + 1)$

م (د) =  $\frac{\text{نهاية د} - \text{البداية د}}{\text{نهاية س} - \text{البداية س}} = \frac{4\pi (س + 1)^2 - 4\pi س^2}{(س + 1) - س} = \frac{4\pi (س^2 + 2س + 1 - س^2)}{1} = 4\pi (2س + 1)$

عندما س = 1، م (د) =  $\frac{4\pi (1 + 1)^2 - 4\pi (1)^2}{(1 + 1) - 1} = \frac{4\pi (4 - 1)}{1} = 12\pi$

عندما س = 2، م (د) =  $\frac{4\pi (2 + 1)^2 - 4\pi (2)^2}{(2 + 1) - 2} = \frac{4\pi (9 - 4)}{1} = 20\pi$

معدل التغير =  $\frac{20\pi - 12\pi}{2 - 1} = 8\pi$

عندما س = 1، م (د) =  $\frac{4\pi (1 + 1)^2 - 4\pi (1)^2}{(1 + 1) - 1} = \frac{4\pi (4 - 1)}{1} = 12\pi$

عندما س = 2، م (د) =  $\frac{4\pi (2 + 1)^2 - 4\pi (2)^2}{(2 + 1) - 2} = \frac{4\pi (9 - 4)}{1} = 20\pi$

معدل التغير =  $\frac{20\pi - 12\pi}{2 - 1} = 8\pi$

عندما س = 1، م (د) =  $\frac{4\pi (1 + 1)^2 - 4\pi (1)^2}{(1 + 1) - 1} = \frac{4\pi (4 - 1)}{1} = 12\pi$







علمنا بتفسير علو الصلح من ا(لى) ١٠  
١٠ س = ا + ب ج ١٢

☐ فهرس ال ملول ضئیع المربع ص ۳۳

$$+ \text{ (ج) } = (\text{ج} + \text{س}) - (\text{س}) = (\text{ج})$$

جهت آن الحذر و بتمهید ای برادر

فصل دوم (۲) علم الاشياء

$$\frac{1}{x+y} \div x + y = (x + y) \div$$

$$(15) \quad (x+y)^2 - (x-y)^2 = (4xy)$$

$$\frac{1}{x} = y = \frac{1}{y} \rightarrow y + y = 2$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(1 + \frac{1}{2})^2} + 1 =$$

$$\frac{a}{(a+b)s} - a = (a) \cdot$$

$$\frac{\left(\frac{1}{(s+1)s}-1\right)s}{s} = \frac{(s)}{s} = (s)$$

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$1 + (x + y) - 1(x + y) = (x + y) \quad \text{⑤}$$

[illegible]

$$(u)_{\mathcal{A}} = (u + v)_{\mathcal{A}} = (u)_{\mathcal{A}}$$

٢ (٧)  $\frac{(1) \div - (8+1) \div}{8}$  (٨) معدل تكبير الصورة (٩)

$$1 + s - s' = (s) \quad \square$$

$$1 + (a + b) - 1(a + b) = (a + b) \therefore$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$d(1-d+n-2) = (n)d - (d+n)d$$

$$\frac{1}{1-x+y} = (1-y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-y)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} (-y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$$

$$1 - \psi_T = (\psi)^T \text{ d. i.}$$

$$V = 1 + (V -) - T(T -) = (T -) \text{ である.}$$

٢٠٠٧ (١٧ - ١٨) لفتح على منسلي و

مجلس المجلس عند الاجتماع (٧٤٧ -)

$$x = 1 - (1 - x^2)^{1/2} = (1 - x^2)^{1/2}$$

$$1 \otimes^L \mathcal{U} = (\mathcal{U}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$1 + \gamma(\mathcal{E} + \mathcal{M}) = (\mathcal{E} + \mathcal{M})\mathcal{D}$$

$$d'(s) = d(s) - \frac{d(s) \cdot d(s+1)}{d(s) + d(s+1)}$$

$$= \frac{(\text{سہ ماہی} + 9) - 10}{9} = \frac{\text{سہ ماہی} - 1}{9}$$

$$2. \quad \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin(\theta + \pi)} = \frac{1}{-\sin \theta} = -\frac{1}{\sin \theta}$$

عند النقطة  $(-4, 4)$   $\frac{dy}{dx} = (x+2)^2$

سجل المصارف =  $(\text{مس})^{\circ} \times \text{ق} = (1 - \text{ق}) \times \text{ق}$

1 ② 1 ① 1 ② 2 ① 2 ① ②

۶) (م) = ۳ ص ۱ + ۳ ص ۲ + ۴ ص ۳

$$\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi \rightarrow \psi \quad \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)$$

$$= \frac{v - \frac{v}{2} + \frac{v}{4} - \frac{v}{8} + \frac{v}{16} - \frac{v}{32} + \frac{v}{64} - \frac{v}{128} + \frac{v}{256} - \frac{v}{512} + \frac{v}{1024} - \frac{v}{2048} + \frac{v}{4096} - \frac{v}{8192} + \frac{v}{16384} - \frac{v}{32768} + \frac{v}{65536} - \frac{v}{131072} + \frac{v}{262144} - \frac{v}{524288} + \frac{v}{1048576} - \frac{v}{2097152} + \frac{v}{4194304} - \frac{v}{8388608} + \frac{v}{16777216} - \frac{v}{33554432} + \frac{v}{67108864} - \frac{v}{134217728} + \frac{v}{268435456} - \frac{v}{536870912} + \frac{v}{1073741824} - \frac{v}{2147483648} + \frac{v}{4294967296} - \frac{v}{8589934592} + \frac{v}{17179869184} - \frac{v}{34359738368} + \frac{v}{68719476736} - \frac{v}{137438953472} + \frac{v}{274877906944} - \frac{v}{549755813888} + \frac{v}{1099511627776} - \frac{v}{2199023255552} + \frac{v}{4398046511104} - \frac{v}{8796093022208} + \frac{v}{17592186044416} - \frac{v}{35184372088832} + \frac{v}{70368744177664} - \frac{v}{140737488355328} + \frac{v}{281474976710656} - \frac{v}{562949953421312} + \frac{v}{1125899906842624} - \frac{v}{2251799813685248} + \frac{v}{4503599627370496} - \frac{v}{9007199254740992} + \frac{v}{18014398509481984} - \frac{v}{36028797018963968} + \frac{v}{72057594037927936} - \frac{v}{144115188075855872} + \frac{v}{288230376151711744} - \frac{v}{576460752303423488} + \frac{v}{1152921504606846976} - \frac{v}{2305843009213693952} + \frac{v}{4611686018427387904} - \frac{v}{9223372036854775808} + \frac{v}{18446744073709551616} - \frac{v}{36893488147419103232} + \frac{v}{73786976294838206464} - \frac{v}{147573952589676412928} + \frac{v}{295147905179352825856} - \frac{v}{590295810358705651712} + \frac{v}{1180591620717411303424} - \frac{v}{2361183241434822606848} + \frac{v}{4722366482869645213696} - \frac{v}{9444732965739290427392} + \frac{v}{18889465931478580854784} - \frac{v}{37778931862957161709568} + \frac{v}{75557863725914323419136} - \frac{v}{151115727451828646838272} + \frac{v}{302231454903657293676544} - \frac{v}{604462909807314587353088} + \frac{v}{1208925819614629174706176} - \frac{v}{2417851639229258349412352} + \frac{v}{4835703278458516698824704} - \frac{v}{9671406556917033397649408} + \frac{v}{19342813113834066795298816} - \frac{v}{38685626227668133590597632} + \frac{v}{77371252455336267181195264} - \frac{v}{154742504910672534362390528} + \frac{v}{309485009821345068724781056} - \frac{v}{618970019642690137449562112} + \frac{v}{1237940039285380274899124224} - \frac{v}{2475880078570760549798248448} + \frac{v}{4951760157141521099596496896} - \frac{v}{9903520314283042199192993792} + \frac{v}{19807040628566084398385987584} - \frac{v}{39614081257132168796771975168} + \frac{v}{79228162514264337593543950336} - \frac{v}{158456325028528675187087900672} + \frac{v}{316912650057057350374175801344} - \frac{v}{633825300114114700748351602688} + \frac{v}{1267650600228229401496703205376} - \frac{v}{2535301200456458802993406410752} + \frac{v}{5070602400912917605986812821504} - \frac{v}{10141204801825835211973625643008} + \frac{v}{20282409603651670423947251286016} - \frac{v}{40564819207303340847894502572032} + \frac{v}{81129638414606681695789005144064} - \frac{v}{162259276829213363391578010288128} + \frac{v}{324518553658426726783156020576256} - \frac{v}{649037107316853453566312041152512} + \frac{v}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{v}{2596148429267413814265248164610048} + \frac{v}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{v}{10384593717069655257060992658440192} + \frac{v}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{v}{41538374868278621028243970633760768} + \frac{v}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{v}{166153499473114484112975882535043072} + \frac{v}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{v}{664613997892457936451903530140172288} + \frac{v}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{v}{2658455991569831745807614120560689152} + \frac{v}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{v}{10633823966279326983230456482242756608} + \frac{v}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{v}{42535295865117307932921825928971026432} + \frac{v}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{v}{170141183460469231731687303715884105728} + \frac{v}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{v}{680564733841876926926749214863536422912} + \frac{v}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{v}{2722258935367507707706996859454145691648} + \frac{v}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{v}{10889035741470030830827987437816582766592} + \frac{v}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{v}{43556142965880123323311949751266331066368} + \frac{v}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{v}{174224571863520493293247799005065324265472} + \frac{v}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{v}{696898287454081973172991196020261297061888} + \frac{v}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{v}{2787593149816327892691964784081045188247552} + \frac{v}{5575186$$

$$\frac{1 \text{ من } 2 + 1 \text{ من } 3 + 1 \text{ من } 4 + 1 \text{ من } 5 + 1 \text{ من } 6 + 1 \text{ من } 7 + 1 \text{ من } 8 + 1 \text{ من } 9 + 1 \text{ من } 10}{10}$$



$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x^2 + 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x}$$

$$(7) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (3) = (3)}^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{نقطة (3, 1) تقع على المحور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{د (3) = (3)}^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$(8) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$(9) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$(10) \text{ د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$\text{د (س) = س}^{-1} \text{ د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$\text{نقطة (1, 1) تقع على المحور}$$

$$\text{ميل المماس عند (س) = 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{د (1) = (1)}^{-1} = 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$

$$= 1$$



$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$x = A(x+1) + B(x-1)$$

$$x = Ax + A + Bx - B$$

$$x = (A+B)x + (A-B)$$

$$1 = A+B \quad 0 = A-B$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

⑧ د (س) =  $\frac{1}{x-2}$  ،  $\therefore \frac{1}{x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$

$$1 = A(x-3) + B(x-1)$$

$$1 = Ax - 3A + Bx - B$$

$$1 = (A+B)x - (3A+B)$$

$$0 = A+B \quad -1 = -3A-B$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} \right)$$

⑨ د (س) =  $\frac{x}{x^2+1}$  ،  $\therefore \frac{x}{x^2+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$$x = A(x-1) + B(x+1)$$

$$x = Ax - A + Bx + B$$

$$x = (A+B)x + (B-A)$$

$$1 = A+B \quad 0 = B-A$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$$

⑩ د (س) =  $\frac{x^2}{x^2+1}$  ،  $\therefore \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$$x^2 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$x^2 = Ax - A + Bx + B$$

$$x^2 = (A+B)x + (B-A)$$

$$0 = A+B \quad 0 = B-A$$

$$A = 0 \quad B = 0$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

⑪ د (س) =  $\frac{1}{x^2-1}$  ،  $\therefore \frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$1 = Ax + A + Bx - B$$

$$1 = (A+B)x + (A-B)$$

$$0 = A+B \quad 1 = A-B$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

⑫ د (س) =  $\frac{1}{x^2+1}$  ،  $\therefore \frac{1}{x^2+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$$1 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$1 = Ax - A + Bx + B$$

$$1 = (A+B)x + (B-A)$$

$$0 = A+B \quad 1 = B-A$$

$$A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

⑬ د (س) =  $\frac{x}{x^2+1}$  ،  $\therefore \frac{x}{x^2+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$$x = A(x-1) + B(x+1)$$

$$x = Ax - A + Bx + B$$

$$x = (A+B)x + (B-A)$$

$$1 = A+B \quad 0 = B-A$$

$$A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right)$$

⑭ د (س) =  $\frac{x^2}{x^2+1}$  ،  $\therefore \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$$x^2 = A(x-1) + B(x+1)$$

$$x^2 = Ax - A + Bx + B$$

$$x^2 = (A+B)x + (B-A)$$

$$0 = A+B \quad 0 = B-A$$

$$A = 0 \quad B = 0$$

$$\therefore \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$







$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

∴ الدالة غير قابلة للاختراق عند  $x = 1$

١٦) مجال  $D = \mathbb{R}$  ∴ الدالة معرفة عند  $x = 2$

$$D(2) = \frac{2^2 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$D'(x) = \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

∴ الدالة غير قابلة للاختراق عند  $x = 2$

١٧) مجال  $D = \mathbb{R}$  ∴ الدالة معرفة عند  $x = 1$

$$D(1) = \frac{1^2 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$D'(x) = \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

∴ الدالة غير قابلة للاختراق عند  $x = 1$

١٨) مجال  $D = \mathbb{R} - \{1\}$  ∴ الدالة غير معرفة عند  $x = 1$

∴ الدالة غير متصلة عند  $x = 1$

∴ الدالة غير قابلة للاختراق عند  $x = 1$

١٩) مجال  $D = \mathbb{R}$  ∴ الدالة معرفة عند  $x = 1$

$$D(1) = \frac{1^2 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$D'(x) = \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - x - 1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$$

∴ الدالة غير قابلة للاختراق عند  $x = 1$

٢٠)  $D(x) = |x - 2|$

$x = 2$  عندما  $x < 2$

$x = 2 - x$  عندما  $x > 2$

بحث الاتصال الدالة أولاً

$$D(2) = 2 - 2 = 0$$

$$D'(x) = \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

مجال  $D = \mathbb{R}$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

∴ الدالة غير قابلة للاختراق عند  $x = 2$

٢١)  $D(x) = |x|$

$x = 0$  عندما  $x < 0$

$x = -x$  عندما  $x > 0$

بحث الاتصال أولاً عند  $x = 0$

$$D(0) = 0$$

$$D'(x) = \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x - 1}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2}$$



$$d(-x) = -dx = -d(x) = -1 \cdot dx = -dx$$

$$d(x^2) = 2x \cdot dx = 2x dx$$

$$d(x^3) = 3x^2 \cdot dx = 3x^2 dx$$

$$d(x^4) = 4x^3 \cdot dx = 4x^3 dx$$

$$d(x^5) = 5x^4 \cdot dx = 5x^4 dx$$

$$d(x^6) = 6x^5 \cdot dx = 6x^5 dx$$

$$d(x^7) = 7x^6 \cdot dx = 7x^6 dx$$

$$d(x^8) = 8x^7 \cdot dx = 8x^7 dx$$

$$d(x^9) = 9x^8 \cdot dx = 9x^8 dx$$

$$d(x^{10}) = 10x^9 \cdot dx = 10x^9 dx$$

$$d(x^{11}) = 11x^{10} \cdot dx = 11x^{10} dx$$

$$d(x^{12}) = 12x^{11} \cdot dx = 12x^{11} dx$$

$$d(x^{13}) = 13x^{12} \cdot dx = 13x^{12} dx$$

$$d(x^{14}) = 14x^{13} \cdot dx = 14x^{13} dx$$

$$d(x^{15}) = 15x^{14} \cdot dx = 15x^{14} dx$$

$$d(x^{16}) = 16x^{15} \cdot dx = 16x^{15} dx$$

$$d(x^{17}) = 17x^{16} \cdot dx = 17x^{16} dx$$

$$d(x^{18}) = 18x^{17} \cdot dx = 18x^{17} dx$$

$$d(x^{19}) = 19x^{18} \cdot dx = 19x^{18} dx$$

$$d(x^{20}) = 20x^{19} \cdot dx = 20x^{19} dx$$

$$d(x^{21}) = 21x^{20} \cdot dx = 21x^{20} dx$$

$$d(x^{22}) = 22x^{21} \cdot dx = 22x^{21} dx$$

$$d(x^{23}) = 23x^{22} \cdot dx = 23x^{22} dx$$

$$d(x^{24}) = 24x^{23} \cdot dx = 24x^{23} dx$$

$$d(x^{25}) = 25x^{24} \cdot dx = 25x^{24} dx$$

$$d(x^{26}) = 26x^{25} \cdot dx = 26x^{25} dx$$

$$d(x^{27}) = 27x^{26} \cdot dx = 27x^{26} dx$$

$$d(x^{28}) = 28x^{27} \cdot dx = 28x^{27} dx$$

$$d(x^{29}) = 29x^{28} \cdot dx = 29x^{28} dx$$

$$d(x^{30}) = 30x^{29} \cdot dx = 30x^{29} dx$$

$$d(x^{31}) = 31x^{30} \cdot dx = 31x^{30} dx$$

$$d(x^{32}) = 32x^{31} \cdot dx = 32x^{31} dx$$

$$d(x^{33}) = 33x^{32} \cdot dx = 33x^{32} dx$$

$$d(x^{34}) = 34x^{33} \cdot dx = 34x^{33} dx$$

$$d(x^{35}) = 35x^{34} \cdot dx = 35x^{34} dx$$

$$d(x^{36}) = 36x^{35} \cdot dx = 36x^{35} dx$$

$$d(x^{37}) = 37x^{36} \cdot dx = 37x^{36} dx$$

$$d(x^{38}) = 38x^{37} \cdot dx = 38x^{37} dx$$

$$d(x^{39}) = 39x^{38} \cdot dx = 39x^{38} dx$$

$$d(x^{40}) = 40x^{39} \cdot dx = 40x^{39} dx$$

$$d(x^{41}) = 41x^{40} \cdot dx = 41x^{40} dx$$

$$d(x^{42}) = 42x^{41} \cdot dx = 42x^{41} dx$$

$$d(x^{43}) = 43x^{42} \cdot dx = 43x^{42} dx$$

$$d(x^{44}) = 44x^{43} \cdot dx = 44x^{43} dx$$

$$d(x^{45}) = 45x^{44} \cdot dx = 45x^{44} dx$$

$$d(x^{46}) = 46x^{45} \cdot dx = 46x^{45} dx$$

$$d(x^{47}) = 47x^{46} \cdot dx = 47x^{46} dx$$

$$d(x^{48}) = 48x^{47} \cdot dx = 48x^{47} dx$$

$$d(x^{49}) = 49x^{48} \cdot dx = 49x^{48} dx$$

$$d(x^{50}) = 50x^{49} \cdot dx = 50x^{49} dx$$

$$d(x^{51}) = 51x^{50} \cdot dx = 51x^{50} dx$$

$$d(x^{52}) = 52x^{51} \cdot dx = 52x^{51} dx$$

$$d(x^{53}) = 53x^{52} \cdot dx = 53x^{52} dx$$

$$d(x^{54}) = 54x^{53} \cdot dx = 54x^{53} dx$$

$$d(x^{55}) = 55x^{54} \cdot dx = 55x^{54} dx$$

$$d(x^{56}) = 56x^{55} \cdot dx = 56x^{55} dx$$

$$d(x^{57}) = 57x^{56} \cdot dx = 57x^{56} dx$$

$$d(x^{58}) = 58x^{57} \cdot dx = 58x^{57} dx$$

$$d(x^{59}) = 59x^{58} \cdot dx = 59x^{58} dx$$

$$d(x^{60}) = 60x^{59} \cdot dx = 60x^{59} dx$$



$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

∴ الدالة غير قابلة للاختلاف عند  $x = 2$

∴ الدالة قابلة للاختلاف عند  $x = 3$  (28)

∴ الدالة متصلة عند  $x = 3$

∴ النهاية اليمنى للدالة = النهاية اليسرى للدالة

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (2 + 3) = 5$$

$$1 - 2 \times 3 + 3^2 = 4 = 2 + 2 \times 3$$

$$2 = 1 \quad A = 1 \quad C = 2 = 1 + 1$$

$$(29) \quad 1 + 1 = 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$(30) \quad 1 + 1 = 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$2 = (3) \quad 2 = (3) \quad 2 = (3) \quad \text{د. (س)}$$

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$$

∴ الدالة غير قابلة للاختلاف عند  $x = 1$

∴ د متصلة عند  $x = 1$  (31)

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 + 1) = 3$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$(32) \quad 2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$

$$2 = 1 \quad 1 = 1 + 1$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) \text{ د}$$

بحث الاتصال عند  $س = 1$  :  $ف = 1 + 1(1) = 2$  د

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

الالة متصلة عند  $س = 1$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

الالة دالة لقيمة الاشتقاق عند  $س = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) \text{ د}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) \text{ د}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \\ \text{من } 1 < 1 \end{array} \right\} = (س) \text{ د}$$

بحث الاتصال عند  $س = 1$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

الالة متصلة عند  $س = 1$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$ف = 1 + 1(1) = 2 \text{ د}$$

$$\textcircled{2} \text{ : سبل المماس عند } (س = 1) \text{ : } ف = 1$$

$$ف = 1 \text{ د}$$

النقطة  $(1, 1)$  دالة للاشتقاق عند  $س = 1$

$$ف = 1 \text{ د}$$

$$\textcircled{18} \text{ الشكل (1) دالة للاشتقاق عند } س = 1$$

$$\textcircled{19} \text{ د } (1) < 1$$

$$\textcircled{20} \text{ د } (1) > 1$$

الالة دالة لقيمة الاشتقاق عند  $س = 1$

$$\textcircled{21} \text{ د } (س) \text{ ثابتة عند } س = 1$$

د (س) دالة للاشتقاق عند  $س = 1$

$$\textcircled{22} \text{ د } (1) = \text{صفر}$$

$$\textcircled{23} \text{ د } (1) = \frac{1}{2} < 1 \text{ صفر}$$

$$\textcircled{24} \text{ د } (1) > 1 \text{ صفر}$$

الالة دالة لقيمة الاشتقاق عند  $س = 1$

$$\textcircled{25} \text{ د } (1) < 1$$

الالة دالة لقيمة الاشتقاق عند  $س = 1$

$$\textcircled{26} \text{ د } (1) > 1$$

$$\textcircled{27} \text{ د } (1) < 1$$

$$\textcircled{28} \text{ د } (1) > 1$$

$$\textcircled{29} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{30} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{31} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

الالة دالة لقيمة الاشتقاق عند  $س = 1$

$$\textcircled{32} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{33} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{34} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{35} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{36} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{37} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{38} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{39} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{40} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{41} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{42} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{43} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$

$$\textcircled{44} \text{ د } (س) = (س - 1) \text{ د}$$



حل: الحالة عند  $x = 1$

$$11 = A + 7(1) \Rightarrow 7 = (1)A$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

الحالة عند  $x = 1$

تمرين (3) على قواعد الاشتقاق

$$1) \text{ مشتقة } 3$$

$$1 - 1$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

الحالة عند  $x = 1$

$$2) \text{ مشتقة } 2 \text{ عندما } x < 1$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

الحالة عند  $x = 1$

$$1) \text{ مشتقة } 1 \text{ عندما } x < 1$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

بحسب الاشتقاق أولاً عند  $x = 1$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$7 = \frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

الحالة عند  $x = 1$

الحالة عند  $x = 1$

$$2) \text{ مشتقة } 1 \text{ عندما } x < 1$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

الحالة عند  $x = 1$

$$3) \text{ مشتقة } 1 \text{ عندما } x < 1$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

$$\frac{11 - (A + 7(1))}{x - 1} = \frac{11 - (1 + 7)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$







$$(3) \text{ من } = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(4) \frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(5) \frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(6) \frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(7) \frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(8) \text{ من } = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(9) \text{ من } = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(10) \text{ من } = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(11) \text{ من } = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$(12) \frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$\frac{\text{لحم}}{\text{لحم}} = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$(13) \text{ من } = (1 + 1) (1 - 1) = 0$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$



$$\textcircled{1} \quad \frac{5x(2-5) - 5x(1+5)}{(1+5)^2} = \frac{10}{(1+5)^2}$$

$$\frac{10}{(1+5)^2} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{3-5}{(3-5)^2} = \frac{(3-5)(3-5)}{(3-5)^2} = \frac{1}{(3-5)^2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{(1+5)(1+5) - 2 \times 2}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(1+5)^2} = \frac{0}{(1+5)^2} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{1 \times (2+5) - (1+5)(1+5)}{(2+5)^2} = \frac{1 \times 7 - 16}{7^2} = \frac{-9}{49}$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(2+5)^2} = \frac{0}{7^2} = 0$$

$$\frac{1 \times 6 + 6 \times 1}{(2+5)^2} = \frac{12}{7^2} = \frac{12}{49}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{5-5}{5-5} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{(5-5)(5-5) - (5+5)(5+5)}{(5-5)^2} = \frac{0 - 40}{0} = \text{undefined}$$

$$\frac{17-5}{(5-5)^2} = \frac{12}{0} = \text{undefined}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{1-5}{1+5} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{(1+5)(1+5) - 2 \times 2}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\frac{1}{(1+5)^2} = \frac{1}{36}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{2}{2+5} + \frac{2}{2+5} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{(2+5)(2+5) - 2 \times 2}{(2+5)^2} = \frac{1}{(2+5)^2}$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(2+5)^2} = \frac{0}{7^2} = 0$$

$$\frac{(1-5)(1-5) - (2+5)(2+5)}{(1-5)^2} = \frac{0 - 49}{16} = -\frac{49}{16}$$

$$\frac{6 \times 6 - 2 \times 2}{(1-5)^2} = \frac{32}{16} = 2$$

$$\frac{1-5}{(1-5)^2} = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{(1+5)(1+5) - 2 \times 2}{(1+5)^2} = \frac{1}{(1+5)^2}$$

$$\frac{1-5}{(1+5)^2} = \frac{-4}{36} = -\frac{1}{9}$$

من 2

$$\frac{3-5}{(3-5)^2} = \frac{1}{(3-5)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{1 \times 6 + 6 \times 1}{(3-5)^2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{1 \times 6 + 6 \times 1}{(3-5)^2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{1 \times 6 + 6 \times 1}{(3-5)^2} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\frac{2 \times 2 - 2 \times 2}{(3-5)^2} = \frac{0}{4} = 0$$



$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\textcircled{7} \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)-(y+1)}{x+1} = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\text{بحل } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \text{ ينتج أن } x=1 \text{ و } y=1$$

$$\textcircled{17} \text{ من } (x+2) \leq (x+3) \text{ و } x=1$$

$$\frac{1+x}{1+x} = 1$$

$$\frac{2x(1+x)-2x(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\text{عند } x=1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\textcircled{11} \text{ من } \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$(1) - 1 = 0 \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{(1-x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{ميل المماس عند } x=1$$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$(1-x) \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\textcircled{7} \Rightarrow x+1 \neq 0 \Rightarrow \frac{(x+1)-(y+1)}{x+1} = \frac{y-1}{y+1}$$

$$\text{بحل } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \text{ ينتج أن } x=1 \text{ و } y=1$$

$$\textcircled{17} \text{ من } (x+2) \leq (x+3) \text{ و } x=1$$

$$\frac{1+x}{1+x} = 1$$

$$\textcircled{17} \text{ من } (x+2) \leq (x+3) \text{ و } x=1$$

$$\frac{1+x}{1+x} = 1$$

$$\frac{2x(1+x)-2x(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x} \Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{2x}{1+x}$$

$$\text{عند } x=1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{(1-x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\text{ميل المماس عند } x=1$$

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$(1-x) \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$



$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x+1}{x+1} = \frac{x+1}{x^2-1}$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$1 = Ax + A + Bx - B$$

$$1 = (A+B)x + (A-B)$$

$$1 = 0x + 1$$

$$1 = 1$$

$$1 = 1$$

بما أن (1) هي مشتقة دالة الخاطئة

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$1 = \frac{1}{2} (x+1) - \frac{1}{2} (x-1)$$

$$1 = \frac{1}{2} (x+1 - x + 1)$$

$$1 = \frac{1}{2} (2) = 1$$

$$1 = 1$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

الاجابة







$$\frac{1-x}{x} = \frac{1}{x} - 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - 1 + 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$







$$(2) \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow x^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow x^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow x^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow x^7 = \frac{1}{128} \Rightarrow x^8 = \frac{1}{256} \Rightarrow x^9 = \frac{1}{512} \Rightarrow x^{10} = \frac{1}{1024} \Rightarrow x^{11} = \frac{1}{2048} \Rightarrow x^{12} = \frac{1}{4096} \Rightarrow x^{13} = \frac{1}{8192} \Rightarrow x^{14} = \frac{1}{16384} \Rightarrow x^{15} = \frac{1}{32768} \Rightarrow x^{16} = \frac{1}{65536} \Rightarrow x^{17} = \frac{1}{131072} \Rightarrow x^{18} = \frac{1}{262144} \Rightarrow x^{19} = \frac{1}{524288} \Rightarrow x^{20} = \frac{1}{1048576} \Rightarrow x^{21} = \frac{1}{2097152} \Rightarrow x^{22} = \frac{1}{4194304} \Rightarrow x^{23} = \frac{1}{8388608} \Rightarrow x^{24} = \frac{1}{16777216} \Rightarrow x^{25} = \frac{1}{33554432} \Rightarrow x^{26} = \frac{1}{67108864} \Rightarrow x^{27} = \frac{1}{134217728} \Rightarrow x^{28} = \frac{1}{268435456} \Rightarrow x^{29} = \frac{1}{536870912} \Rightarrow x^{30} = \frac{1}{1073741824} \Rightarrow x^{31} = \frac{1}{2147483648} \Rightarrow x^{32} = \frac{1}{4294967296} \Rightarrow x^{33} = \frac{1}{8589934592} \Rightarrow x^{34} = \frac{1}{17179869184} \Rightarrow x^{35} = \frac{1}{34359738368} \Rightarrow x^{36} = \frac{1}{68719476736} \Rightarrow x^{37} = \frac{1}{137438953472} \Rightarrow x^{38} = \frac{1}{274877906944} \Rightarrow x^{39} = \frac{1}{549755813888} \Rightarrow x^{40} = \frac{1}{1099511627776} \Rightarrow x^{41} = \frac{1}{2199023255552} \Rightarrow x^{42} = \frac{1}{4398046511104} \Rightarrow x^{43} = \frac{1}{8796093022208} \Rightarrow x^{44} = \frac{1}{17592186044416} \Rightarrow x^{45} = \frac{1}{35184372088832} \Rightarrow x^{46} = \frac{1}{70368744177664} \Rightarrow x^{47} = \frac{1}{140737488355328} \Rightarrow x^{48} = \frac{1}{281474976710656} \Rightarrow x^{49} = \frac{1}{562949953421312} \Rightarrow x^{50} = \frac{1}{1125899906842624} \Rightarrow x^{51} = \frac{1}{2251799813685248} \Rightarrow x^{52} = \frac{1}{4503599627370496} \Rightarrow x^{53} = \frac{1}{9007199254740992} \Rightarrow x^{54} = \frac{1}{18014398509481984} \Rightarrow x^{55} = \frac{1}{36028797018963968} \Rightarrow x^{56} = \frac{1}{72057594037927936} \Rightarrow x^{57} = \frac{1}{144115188075855872} \Rightarrow x^{58} = \frac{1}{288230376151711744} \Rightarrow x^{59} = \frac{1}{576460752303423488} \Rightarrow x^{60} = \frac{1}{1152921504606846976} \Rightarrow x^{61} = \frac{1}{2305843009213693952} \Rightarrow x^{62} = \frac{1}{4611686018427387904} \Rightarrow x^{63} = \frac{1}{9223372036854775808} \Rightarrow x^{64} = \frac{1}{18446744073709551616} \Rightarrow x^{65} = \frac{1}{36893488147419103232} \Rightarrow x^{66} = \frac{1}{73786976294838206464} \Rightarrow x^{67} = \frac{1}{147573952589676412928} \Rightarrow x^{68} = \frac{1}{295147905179352825856} \Rightarrow x^{69} = \frac{1}{590295810358705651712} \Rightarrow x^{70} = \frac{1}{1180591620717411303424} \Rightarrow x^{71} = \frac{1}{2361183241434822606848} \Rightarrow x^{72} = \frac{1}{4722366482869645213696} \Rightarrow x^{73} = \frac{1}{9444732965739290427392} \Rightarrow x^{74} = \frac{1}{18889465931478580854784} \Rightarrow x^{75} = \frac{1}{37778931862957161709568} \Rightarrow x^{76} = \frac{1}{75557863725914323419136} \Rightarrow x^{77} = \frac{1}{151115727451828646838272} \Rightarrow x^{78} = \frac{1}{302231454903657293676544} \Rightarrow x^{79} = \frac{1}{604462909807314587353088} \Rightarrow x^{80} = \frac{1}{1208925819614629174706176} \Rightarrow x^{81} = \frac{1}{2417851639229258349412352} \Rightarrow x^{82} = \frac{1}{4835703278458516698824704} \Rightarrow x^{83} = \frac{1}{9671406556917033397649408} \Rightarrow x^{84} = \frac{1}{19342813113834066795298816} \Rightarrow x^{85} = \frac{1}{38685626227668133590597632} \Rightarrow x^{86} = \frac{1}{77371252455336267181195264} \Rightarrow x^{87} = \frac{1}{154742504910672534362390528} \Rightarrow x^{88} = \frac{1}{309485009821345068724781056} \Rightarrow x^{89} = \frac{1}{618970019642690137449562112} \Rightarrow x^{90} = \frac{1}{1237940039285380274899124224} \Rightarrow x^{91} = \frac{1}{2475880078570760549798248448} \Rightarrow x^{92} = \frac{1}{4951760157141521099596496896} \Rightarrow x^{93} = \frac{1}{9903520314283042199192993792} \Rightarrow x^{94} = \frac{1}{19807040628566084398385987584} \Rightarrow x^{95} = \frac{1}{39614081257132168796771975168} \Rightarrow x^{96} = \frac{1}{79228162514264337593543950336} \Rightarrow x^{97} = \frac{1}{158456325028528675187087900672} \Rightarrow x^{98} = \frac{1}{316912650057057350374175801344} \Rightarrow x^{99} = \frac{1}{633825300114114700748351602688} \Rightarrow x^{100} = \frac{1}{1267650600228229401496703205376} \Rightarrow x^{101} = \frac{1}{2535301200456458802993406410752} \Rightarrow x^{102} = \frac{1}{5070602400912917605986812821504} \Rightarrow x^{103} = \frac{1}{10141204801825835211973625643008} \Rightarrow x^{104} = \frac{1}{20282409603651670423947251286016} \Rightarrow x^{105} = \frac{1}{40564819207303340847894502572032} \Rightarrow x^{106} = \frac{1}{81129638414606681695789005144064} \Rightarrow x^{107} = \frac{1}{162259276829213363391578010288128} \Rightarrow x^{108} = \frac{1}{324518553658426726783156020576256} \Rightarrow x^{109} = \frac{1}{649037107316853453566312041152512} \Rightarrow x^{110} = \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} \Rightarrow x^{111} = \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} \Rightarrow x^{112} = \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} \Rightarrow x^{113} = \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} \Rightarrow x^{114} = \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} \Rightarrow x^{115} = \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} \Rightarrow x^{116} = \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} \Rightarrow x^{117} = \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} \Rightarrow x^{118} = \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} \Rightarrow x^{119} = \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} \Rightarrow x^{120} = \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} \Rightarrow x^{121} = \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} \Rightarrow x^{122} = \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} \Rightarrow x^{123} = \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} \Rightarrow x^{124} = \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} \Rightarrow x^{125} = \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} \Rightarrow x^{126} = \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} \Rightarrow x^{127} = \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} \Rightarrow x^{128} = \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} \Rightarrow x^{129} = \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} \Rightarrow x^{130} = \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} \Rightarrow x^{131} = \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} \Rightarrow x^{132} = \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} \Rightarrow x^{133} = \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} \Rightarrow x^{134} = \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} \Rightarrow x^{135} = \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} \Rightarrow x^{136} = \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} \Rightarrow x^{137} = \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} \Rightarrow x^{138} = \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} \Rightarrow x^{139} = \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} \Rightarrow x^{140} = \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} \Rightarrow x^{141} = \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} \Rightarrow x^{142} = \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} \Rightarrow x^{143} = \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} \Rightarrow x^{144} = \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} \Rightarrow x^{145} = \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} \Rightarrow x^{146} = \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} \Rightarrow x^{147} = \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} \Rightarrow x^{148} = \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} \Rightarrow x^{149} = \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} \Rightarrow x^{150} = \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} \Rightarrow x^{151} = \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} \Rightarrow x^{152} = \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} \Rightarrow x^{153} = \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} \Rightarrow x^{154} = \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} \Rightarrow x^{155} = \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} \Rightarrow x^{156} = \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} \Rightarrow x^{157} = \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} \Rightarrow x^{158} = \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} \Rightarrow x^{159} = \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} \Rightarrow x^{160} = \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} \Rightarrow x^{161} = \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} \Rightarrow x^{162} = \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} \Rightarrow x^{163} = \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} \Rightarrow x^{164} = \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} \Rightarrow x^{165} = \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} \Rightarrow x^{166} = \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} \Rightarrow x^{167} = \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} \Rightarrow x^{168} = \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} \Rightarrow x^{169} = \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} \Rightarrow x^{170} = \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} \Rightarrow x^{171} = \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} \Rightarrow x^{172} = \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} \Rightarrow x^{173} = \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} \Rightarrow x^{174} = \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} \Rightarrow x^{175} = \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} \Rightarrow x^{176} = \frac{1}{95780971304118053647396689196894323976171195136475136} \Rightarrow x^{177} = \frac{1}{191561942608236107294793378393788647952342390272950272} \Rightarrow x^{178} = \frac{1}{383123885216472214589586756787577295904684780545900544} \Rightarrow x^{179} = \frac{1}{766247770432944429179173513575154591809369561091801088} \Rightarrow x^{180} = \frac{1}{1532495540865888858358347027150309183618739122183602176} \Rightarrow x^{181} = \frac{1}{3064991081731777716716694054300618367237478244367204352} \Rightarrow x^{182} = \frac{1}{6129982163463555433433388108601236734474956488734408704} \Rightarrow x^{183} = \frac{1}{12259964326927110866866776217202473468949912977468817408} \Rightarrow x^{184} = \frac{1}{24519928653854221733733552434404946937899825954937634816} \Rightarrow x^{185} = \frac{1}{49039857307708443467467104868809893875799651909875269632} \Rightarrow x^{186} = \frac{1}{98079714615416886934934209737619787751599303819750539264} \Rightarrow x^{187} = \frac{1}{196159429230833773869868419475239575503198607639501078528} \Rightarrow x^{188} = \frac{1}{392318858461667547739736838950479151006397215279002157056} \Rightarrow x^{189} = \frac{1}{784637716923335095479473677900958302012794430558004314112} \Rightarrow x^{190} = \frac{1}{1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224} \Rightarrow x^{191} = \frac{1}{3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448} \Rightarrow x^{192} = \frac{1}{6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896} \Rightarrow x^{193} = \frac{1}{12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792} \Rightarrow x^{194} = \frac{1}{25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584} \Rightarrow x^{195} = \frac{1}{50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168} \Rightarrow x^{196} = \frac{1}{100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336} \Rightarrow x^{197} = \frac{1}{200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672} \Rightarrow x^{198} = \frac{1}{401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344} \Rightarrow x^{199} = \frac{1}{803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688} \Rightarrow x^{200} = \frac{1}{1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376} \Rightarrow x^{201} = \frac{1}{3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752} \Rightarrow x^{202} = \frac{1}{6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504} \Rightarrow x^{203} = \frac{1}{12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008} \Rightarrow x^{204} = \frac{1}{25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016} \Rightarrow x^{205} = \frac{1}{51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032} \Rightarrow x^{206} = \frac{1}{102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064} \Rightarrow x^{207} = \frac{1}{205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128} \Rightarrow x^{208} = \frac{1}{411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256} \Rightarrow x^{209} = \frac{1}{822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512} \Rightarrow x^{210} = \frac{1}{1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024} \Rightarrow x^{211} = \frac{1}{3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048} \Rightarrow x^{212} = \frac{1}{6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096} \Rightarrow x^{213} = \frac{1}{13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192} \Rightarrow x^{214} = \frac{1}{26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384} \Rightarrow x^{215} = \frac{1}{52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768} \Rightarrow x^{216} = \frac{1}{105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536} \Rightarrow x^{217} = \frac{1}{210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072} \Rightarrow x^{218} = \frac{1}{421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144} \Rightarrow x^{219} = \frac{1}{842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288} \Rightarrow x^{220} = \frac{1}{1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576} \Rightarrow x^{221} = \frac{1}{3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152} \Rightarrow x^{222} = \frac{1}{6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304} \Rightarrow x^{223} = \frac{1}{13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608} \Rightarrow x^{224} = \frac{1}{26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216} \Rightarrow x^{225} = \frac{1}{53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432} \Rightarrow x^{226} = \frac{1}{107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864} \Rightarrow x^{227} = \frac{1}{215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728} \Rightarrow x^{228} = \frac{1}{431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456} \Rightarrow x^{229} = \frac{1}{862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912} \Rightarrow x^{230} = \frac{1}{1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824} \Rightarrow x^{231} = \frac{1}{3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648} \Rightarrow x^{232} = \frac{1}{6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296} \Rightarrow x^{233} = \frac{1}{13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592} \Rightarrow x^{234} = \frac{1}{27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184} \Rightarrow x^{235} = \frac{1}{55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368} \Rightarrow x^{236} = \frac{1}{110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736} \Rightarrow x^{237} = \frac{1}{220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472} \Rightarrow x^{238} = \frac{1}{441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944} \Rightarrow x^{239} = \frac{1}{883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888} \Rightarrow x^{240} = \frac{1}{1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776} \Rightarrow x^{241} = \frac{1}{35336941295567686591665950$$







$$\textcircled{17} \text{ من } = \frac{\text{عاس}}{\text{عاس} + 1}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{(1 + \text{عاس})(\text{عاس} - 1) + \text{عاس} - 1}{(1 + \text{عاس})^2}$$

$$\frac{\text{عاس} + \text{عاس} + \text{عاس} + \text{عاس}}{(1 + \text{عاس})^2}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1 + \text{عاس}}{(1 + \text{عاس})^2} \therefore \frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1}{1 + \text{عاس}}$$

$$\textcircled{18} \text{ من } = \text{عاس} (\text{عاس} + \text{عاس} + \text{عاس})$$

$$\text{من } = \text{عاس} \times 1 = \text{عاس} \therefore \frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\text{عاس}}{\text{عاس}}$$

$$\textcircled{19} \text{ من } = \text{عاس} - 1 = \text{عاس} - \text{عاس} = \text{عاس} (\text{عاس})^2$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{2 (\text{عاس})}{\text{عاس}^2} = \frac{2}{\text{عاس}}$$

$$\textcircled{20} \text{ من } = \text{عاس} + 1 = \text{عاس}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1 + 1}{\text{عاس}} = \frac{2}{\text{عاس}}$$

$$\textcircled{21} \text{ من } = \text{عاس} + \text{عاس} = 2 \text{عاس}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\text{عاس} + \text{عاس}}{2 \text{عاس}} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{22} \text{ من } = \text{عاس} (\text{عاس})$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1}{\text{عاس}^2} = \frac{1}{\text{عاس}^2}$$

$$\textcircled{23} \text{ من } = \text{عاس}^2 + 1 = \frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} \therefore \text{عاس}^2 = \text{عاس} - 1$$

$$\textcircled{24} \text{ من } = \text{عاس} \left( \frac{1}{\text{عاس}} \right) \therefore \text{عاس} = \text{عاس}^2$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\text{عاس} - 1}{\text{عاس}} = \frac{1}{\text{عاس}} \therefore \text{عاس} = 1$$

$$\textcircled{25} \frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{3 \text{عاس}^2 (3 + \text{عاس}) + 3 \text{عاس} (3 + \text{عاس}) + 3}{3 \times (3 + \text{عاس})}$$

$$= \frac{9 \text{عاس}^2 + 9 \text{عاس} + 9}{3(3 + \text{عاس})}$$

$$\textcircled{26} \frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{2 \text{عاس}^2 + 2 \text{عاس} + 2}{2 \text{عاس}^2 + 2 \text{عاس} + 2}$$

$$= \frac{2(\text{عاس}^2 + \text{عاس} + 1)}{2(\text{عاس}^2 + \text{عاس} + 1)}$$

$$\textcircled{27} \text{ من } = 1 \text{عاس}^2 \therefore \text{عاس} = 1 \text{عاس}^2$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1 \text{عاس}^2}{1 \text{عاس}^2} = 1$$

$$= 2 \text{عاس}^2 \text{عاس} (\text{عاس})^2$$

$$\textcircled{28} \text{ من } = \left[ \left( \frac{\text{عاس}}{1 + \text{عاس}} \right) \right]^2$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{3 \left[ \left( \frac{\text{عاس}}{1 + \text{عاس}} \right) \right]^2 - \left[ \frac{(1 + \text{عاس}) - 1}{(1 + \text{عاس})} \right]^2}{\left[ \left( \frac{\text{عاس}}{1 + \text{عاس}} \right) \right]^2}$$

$$\text{عاس} \left( \frac{\text{عاس}}{1 + \text{عاس}} \right)$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{3 - \text{عاس} \left( \frac{\text{عاس}}{1 + \text{عاس}} \right) + \text{عاس} \left( \frac{\text{عاس}}{1 + \text{عاس}} \right)}{(1 + \text{عاس})^2}$$

$$\textcircled{29} \text{ من } = \text{عاس} (\text{عاس})$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\text{عاس} (\text{عاس})}{\text{عاس}} = \text{عاس}$$

$$= \text{عاس} - \text{عاس} = \text{عاس} (\text{عاس})$$

$$\textcircled{30} \text{ من } = 1 + \text{عاس} = 2 \text{عاس}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\text{عاس}^2}{\text{عاس}^2 + 1}$$

$$\textcircled{31} \text{ من } = 3 \text{عاس} - \text{عاس}^2$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{3 - \text{عاس}^2}{3}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{3 - \text{عاس}^2}{3}$$

$$\textcircled{32} \text{ من } = \text{عاس} + \text{عاس} = 2 \text{عاس}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\text{عاس} - \text{عاس}}{\text{عاس}}$$

$$\textcircled{33} \text{ من } = \text{عاس} (\text{عاس})$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\text{عاس} - \text{عاس}}{\text{عاس}}$$

$$\textcircled{34} \text{ من } = \text{عاس} + \text{عاس} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{من } = \text{عاس} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{35} \text{ من } = \text{عاس} + \text{عاس} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{من } = \text{عاس} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{\text{عاس}}{\text{عاس}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{36} \text{ من } = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{من } = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \therefore \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$



















$$(22) \text{ من } 1 = 2 - 2(2 - 2) = 1$$

$$1 = 2 - 2(2 - 2) = 1$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{ميل المستقيم} = \frac{\text{مماسل من}}{\text{مماسل من}} = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

$$1 = \frac{2 - 2}{1} = 0 \quad \therefore \text{المماس // المستقيم}$$

$$\therefore \text{ميل المماس} = \text{ميل المستقيم} \quad \therefore 2 - 2 = 0 = 0$$

$$2 = 2 \quad (2 +)$$

$$\text{من } 1 = 2 - 2(2 - 2) = 1 \quad \therefore \text{النقطة هي } (2, 2)$$

$$(23) \text{ من } \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{1 \times (2 - 2) - 1 \times (1 - 2)}{1 - 2}$$

$$\frac{1}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2}$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 1 = 2 - 2 = 0 \quad \therefore \frac{1}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2}$$

$$\therefore \text{المماس // المستقيم} \quad \therefore \text{ميل المماس} = \text{ميل المستقيم}$$

$$1 = \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2}$$

$$1 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{عندما } 1 = 1 \quad \therefore 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{عندما } 1 = 1 \quad \therefore 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore \text{النقطة هي } (2, 2) \text{ و } (1, 1)$$

$$(24) \text{ من } \frac{1 \times (2 - 2) - 1 \times (1 - 2)}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2}$$

$$\frac{1}{1 - 2} = \frac{2 - 2}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2}$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{ميل العمودي} = \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2}$$

$$1 = \frac{1}{1 - 2} = \frac{1}{1 - 2}$$

$$1 = 2 - 2 = 0 \quad \therefore 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{أما } 1 = 1 \quad \therefore 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{أو } 1 = 1 \quad \therefore 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{عندما } 1 = 1 \quad \therefore 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{عندما } 1 = 1 \quad \therefore 1 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore \text{النقطة هي } (2, 2) \text{ و } (1, 1)$$

$$(25) \text{ من } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{معادلة المستقيم: } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore \text{ميل المستقيم} = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{معادلة في الربع الثاني، الثالث}$$

$$\text{الربع الثاني: } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{أو الربع الثالث: } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$(26) \text{ من } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore \text{المماس // محور السينات} \quad \therefore \frac{2 - 2}{1} = \frac{2 - 2}{1}$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{ط. موجبة في الربع الأول، الثالث}$$

$$\text{الربع الأول: } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{الربع الثالث: } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\text{من } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$(27) \text{ من } 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore 2 = 2 - 2 = 0$$







معادلة العمودي:

$$(x - 1) = (y - 2) \frac{1}{-2} \Rightarrow (x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2)$$

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow (2x - 2) = (y - 2)$$

$$2x - 2 = y - 2 \Rightarrow 2x = y \Rightarrow y = 2x$$

$$\textcircled{2} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{1 \times (2 + x) - 1 \times (2 - x)}{(2 - x)} = \frac{2 - x}{2 - x} = 1$$

$$\frac{1 - (2 - x)}{(2 - x)} = \frac{1 - 2 + x}{2 - x} = \frac{x - 1}{2 - x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2 - x} \Rightarrow 2 - x = 2(x - 1) \Rightarrow 2 - x = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{2}{3} = y - 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\textcircled{1} \quad x = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$y = 2x \Rightarrow y = 2(2) = 4$$

$$\therefore \text{معادلة العمودي هي: } (x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2)$$

$$2x - 2 = y - 2 \Rightarrow 2x = y$$

$$\therefore y = 2x$$

$$\textcircled{3} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$\frac{1 \times (2 + x) - 1 \times (2 - x)}{(2 - x)} = \frac{2 - x}{2 - x} = 1$$

$$\frac{1 - (2 - x)}{(2 - x)} = \frac{1 - 2 + x}{2 - x} = \frac{x - 1}{2 - x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2 - x} \Rightarrow 2 - x = 2(x - 1) \Rightarrow 2 - x = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2 - x} \Rightarrow 2 - x = 2(x - 1) \Rightarrow 2 - x = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{معادلة العمودي هي: } (x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2)$$

$$\textcircled{4} \quad x = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$y = 2x \Rightarrow y = 2(2) = 4$$

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{2}{3} = y - 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{2}{3} = y - 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore y = 2x$$

$$\textcircled{1} \quad x = 2 \Rightarrow y = 4$$

$$y = 2x \Rightarrow y = 2(2) = 4$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2 - x} \Rightarrow 2 - x = 2(x - 1) \Rightarrow 2 - x = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{2}{3} = y - 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2 - x} \Rightarrow 2 - x = 2(x - 1) \Rightarrow 2 - x = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$(x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \left(\frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(y - 2) \Rightarrow \frac{2}{3} = y - 2 \Rightarrow y = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore y = 2x$$

نقطة التقاطع مع محور السينات  $y = 0$

$$0 = (x - 1) \frac{1}{2} \Rightarrow 0 = x - 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\text{النقطة } (1, 0)$$

$$\frac{1 \times (2 + x) - 1 \times (2 - x)}{(2 - x)} = \frac{2 - x}{2 - x} = 1$$

$$\frac{1 - (2 - x)}{(2 - x)} = \frac{1 - 2 + x}{2 - x} = \frac{x - 1}{2 - x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2 - x} \Rightarrow 2 - x = 2(x - 1) \Rightarrow 2 - x = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x - 1}{2 - x} \Rightarrow 2 - x = 2(x - 1) \Rightarrow 2 - x = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 3x \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\text{معادلة العمودي هي: } (x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2)$$

$$2x - 2 = y - 2 \Rightarrow 2x = y$$

$$\therefore y = 2x$$

$$\text{معادلة العمودي هي: } (x - 1) = \frac{1}{2}(y - 2)$$

$$2x - 2 = y - 2 \Rightarrow 2x = y$$

$$\therefore y = 2x$$

لايجاد نقطة التقاطع

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$

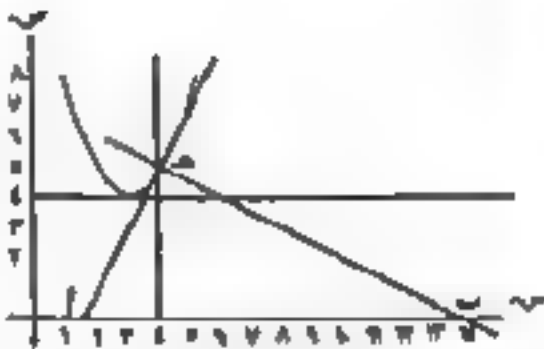
$$\therefore x = 1$$

$$\therefore x = 1$$









٢٩) من  $(3-s) = 4 + 3s$   $\therefore \frac{1}{s} = \frac{3}{(3-s)}$

١) لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع  $s = 0$

من  $4 = (3-0) + 3(0) \Rightarrow 4 = 3$  (غير ممكن)

$\left[ \frac{1}{s} \right]_{(0,4)} = \frac{1}{(3-0)} = \frac{1}{3}$

معادلة المماس هي:

(من ١٢)  $4 - (3-s) = 3(0-s)$   $\therefore 1 - 3s = -3s$

$0 = 1 - 3s \Rightarrow s = \frac{1}{3}$

٢) لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع

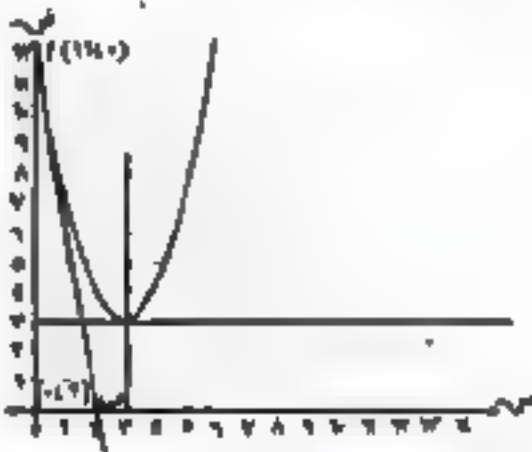
$s = 0$

$\therefore 4 - 0 = 3(0-s) \Rightarrow 4 = -3s$

$\therefore$  نقطة التقاطع هي  $(-\frac{4}{3}, 0)$

٣) مساحة  $\Delta$  المطلوب هو مساحة  $\Delta$  و  $AB$

$\frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$  وحدة مربعة



٢٠) نفرض أن  $(\frac{1}{s}, t)$   $\therefore \frac{1}{s} = \frac{t}{(3-s)}$

$\therefore$  ميل المماس عند  $(\frac{1}{s}, t)$  يساوي  $\frac{3}{1-s}$

معادلة المماس عند  $(\frac{1}{s}, t)$  هي:  $t - \frac{3}{1-s} = \frac{3}{1-s}(\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s})$

بالتعويض  $x = \frac{1}{s}$   $\therefore t - \frac{3}{1-s} = \frac{3}{1-s}(\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s})$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

$\left[ \frac{1}{s} \right]_{(0,4)} = \frac{1}{(3-0)} = \frac{1}{3}$

ميل المماس  $\frac{3}{1-s} = 3$

$\left[ \frac{1}{s} \right]_{(0,4)} = \frac{1}{(3-0)} = \frac{1}{3}$

ميل المماس  $\frac{3}{1-s} = 3$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

٢١) من  $s = 0$   $\therefore \frac{1}{s} = \frac{3}{(3-s)}$

معادلة المماس المار بالنقطة  $(0, 4)$

$(0-s) = \frac{3}{1-s}(0 - \frac{1}{1-s})$

$0 = \frac{3}{1-s} \Rightarrow s = 1$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

$\therefore 3 = 2 + 3s \Rightarrow s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

$\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

من  $s = 0$   $\therefore \frac{1}{s} = \frac{3}{(3-s)}$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

$\therefore$  النقطة هي  $(0, 4)$  و  $(12, 0)$

٢٢) من  $s = 0$   $\therefore \frac{1}{s} = \frac{3}{(3-s)}$

$\left[ \frac{1}{s} \right]_{(0,4)} = \frac{1}{(3-0)} = \frac{1}{3}$

معادلة المماس هي:

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع  $s = 0$

$\left[ \frac{1}{s} \right]_{(0,4)} = \frac{1}{(3-0)} = \frac{1}{3}$

معادلة المماس هي:  $t - \frac{3}{1-s} = \frac{3}{1-s}(\frac{1}{s} - \frac{1}{1-s})$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

لإيجاد نقطة تقاطع المماس مع محور السينات نضع  $s = 0$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

النقطة  $(0, 4)$

من  $3 = 2 + 3s$   $\therefore s = \frac{1}{3}$   $\therefore t = 4$

مساحة  $\Delta$   $AB$   $\frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$  وحدة مربعة



∴ معادلة  $Q$  هي  $Q = 1 - A$

لايجاد نقطة تقاطع المستقيم  $Q$  مع محور السينات فإن  $Q = 0$

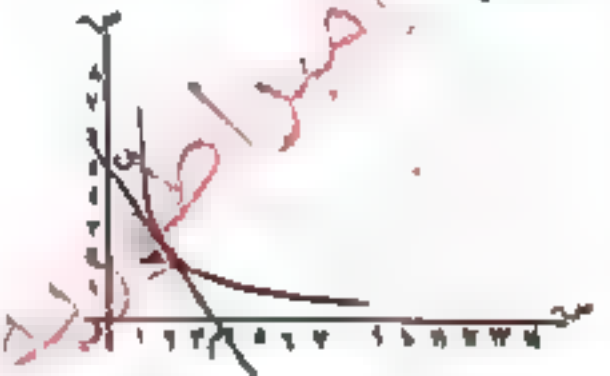
∴  $Q = 0$  أي أن  $Q = 0$  من الوحدتين

لايجاد نقطة تقاطع المستقيم  $Q$  مع محور الصادات فإن  $Q = 1$

∴  $Q = 1$  أي أن  $Q = 1$  من الوحدتين

∴ مساحة  $\Delta$   $M = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$  وحدة مربعة

وهي كمية ثابتة لا تعتمد على إحداثيين نقطة  $M$  الواقعة على اللحن



(٢٦)  $Q = \frac{1}{1+A}$  ∴  $Q = \frac{1}{1+(-1)}$  ∴  $Q = -1$

$$\frac{1}{1+(-1)} = -1 \quad \therefore$$

$$1 = (1+(-1)) \quad \therefore 1 = 0$$

$$1 = 1 + (-1) \quad \therefore 1 = 0$$

$$\frac{1}{1+(-1)} = -1 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{1+(-1)} = -1 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{1+(-1)} = -1 \quad \therefore$$

$$\frac{1}{1+(-1)} = -1 \quad \therefore$$

$$1 = 1 + (-1) \quad \therefore 1 = 0$$

بالتعويض في (١) من

$$1 = 1 + (-1) \quad \therefore 1 = 0$$

(٢٧) ∴ النقطة  $(-1, -1)$  تقع على اللحن  $Q = \frac{1}{1+A}$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore -1 = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore -1 = -1$$

بما أن  $Q = -1$  عند  $A = -1$  فإن نقطة  $M$  هي

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

∴ المستقيم  $Q = -1$  مع  $A = -1$  مماس للحن عند النقطة  $(-1, -1)$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

بما أن  $Q = -1$  عند  $A = -1$  فإن  $Q = -1$  مع  $A = -1$  مماس للحن عند النقطة  $(-1, -1)$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

∴ اللحن  $Q = \frac{1}{1+A}$  مماس للحن عند النقطة  $(-1, -1)$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

∴ المستقيم  $Q = -1$  مع  $A = -1$  مماس للحن عند النقطة  $(-1, -1)$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

بالتعويض في (١) من

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

∴ النقطة  $(-1, -1)$  تقع على اللحن  $Q = \frac{1}{1+A}$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

∴ النقطة  $(-1, -1)$  تقع على اللحن  $Q = \frac{1}{1+A}$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$

$$Q = \frac{1}{1+A} \quad \therefore Q = \frac{1}{1+(-1)} \quad \therefore Q = -1$$



معادلة التماس هي:  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 1$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = 1$$

$$(37) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

نقطة التماس هي:  $(1, 1)$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x-3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y-3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

نقطة التماس هي:  $(1, 1)$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$(38) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$(39) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$(40) \quad x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

نقطة التماس هي:  $(1, 1)$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 6y + 17 = 1$$



١ (١) ٩ ٦ (٢)

١٠٩ (٣)  $\frac{1}{2}$

٥ (٤) ٣ ١١ - ٦ ٥

١٠٥ (٥) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٦) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٧) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٨) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٩) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٠) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١١) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٢) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٣) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٤) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٥) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٦) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٧) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٨) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (١٩) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٠) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢١) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٢) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٣) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٤) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٥) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٦) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٧) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٨) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٢٩) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٠) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣١) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٢) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٣) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٤) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٥) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٦) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٧) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٨) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٣٩) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٠) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤١) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٢) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٣) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٤) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٥) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٦) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٧) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٨) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٤٩) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٠) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥١) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٢) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٣) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٤) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٥) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٦) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٧) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٨) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٥٩) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٦٠) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٦١) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٦٢) ٦ ١١ - ٦ ٥

٦ (٦٣) ٦ ١١ - ٦ ٥



















$$u = \frac{1-s}{(1-s^2)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x^2 - (1 - x^2) \left\{ \frac{1}{4} \right\} = x^2 - (1 - x^2) \left\{ \frac{1}{4} \right\} =$$

$$u + \frac{v(1-u^2)}{1-u^2} = \frac{1}{v} = \frac{v(1-u^2)}{1-u^2} \times \frac{1}{v} =$$

$$z = \frac{1}{(1 - \cos \theta)A} + \frac{1}{(1 - \cos \theta)B}$$

(3) | سید فاضل احمد صاحب

$$\sqrt{4 + 5x^2} + 5x^2 \left\{ \frac{1}{x} \right\} =$$

$$\left[ (1 + \sin^2 \theta) (1 - \sin^2 \theta) \right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} \right] \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} \right] \left[ \frac{1}{1 + \frac{1}{p}} \right] =$$

[ (۴۰۷) و س ]

$$= \frac{1}{4} (1+s^2) \frac{1}{s} - \frac{1}{4} (1+s^2) \frac{1}{s^3} =$$

$$\Delta = \frac{\frac{r}{r+u-r}}{r+\frac{r}{u}} \approx \frac{r}{r} = \frac{r}{r+u-r} \approx \frac{r}{r} \Delta$$

$$S = \frac{1}{2}(1+u^{-2}) \frac{1}{10} + \frac{1}{2}(1+u^{-2}) \frac{1}{10} =$$

(۷) مس ۸۰ سی و سی

[illegible]

(1+1)

$$\frac{1}{(1+s)} - \frac{1}{(1+s)^2} = \frac{1}{(1+s)^2}$$

$$1 - (1 + \frac{1}{n})^{-n} \approx 1 - e^{-1} \approx 0.632$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{(100)^2(100)}{(100)^2(100)} = 1$$

$$16 \text{ مرس } 16 + 16 = 32$$

سید - ۱۹۰۵ = ۱۹۰۴

سید - ۱۹۰۶ = ۱۹۰۷

$$= \frac{1}{(1-s)} + \frac{(1+s)}{(1-s)^2} = \frac{1+s}{(1-s)^2}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^n : x \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n\}$$

⑤ ①  $[ \text{طا}^{\text{س}} \text{س} \text{ع} \text{س} ] = [ \text{طا}^{\text{س}} \text{س} ] + [ \text{س} ]$

② انا اس و س = انا (مؤنث) و س

$$= \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \}$$

$$= \left[ (1-2) \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \right] \text{ اسی } [ \text{ اسی } ]$$

$$x = \left[ \frac{7}{4} - 2 \text{ حنا } 2 \text{ حنا } 1 \right] \frac{1}{4} \text{ حنا } 1 \text{ حنا } 1$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

(۴)  $\left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  مقلد

١٠٠ (مئة) روپے

[illegible]

$$= \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 1$$

[illegible]

④  $\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{a^2 + b^2 + c^2}$

1. (عاس عاس X ما نس - عاس عاس و عاس نس)

$$= \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \right) = \frac{1}{2}$$

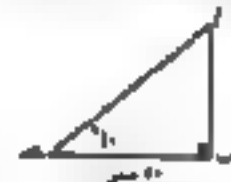
$$u + u^{-1} \geq \frac{1}{2} + u^2$$



# حلول تمارين حساب المثلثات

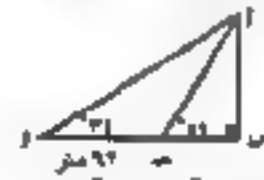
تمارين (١) هي رواية الارتفاع والابعاد

$$1) \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$



$$AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$2) \text{ في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$



$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

الارتفاع (AB) = 17.2 متر

$$3) \text{ في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

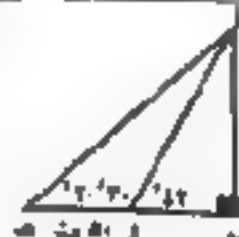
$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

في  $\Delta ABC$ :  $\angle C = 90^\circ$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$4) \text{ بفرض ان } AB \text{ هو ارتفاع المربع}$$



$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$\text{في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$

$$5) \text{ من الشكل المرفق}$$



$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$\text{في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$\text{في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

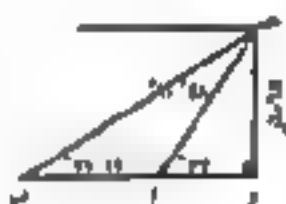
$$\text{في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$\text{في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$



$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$\text{في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$6) \text{ في } \Delta ABC$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$

$$\text{في } \Delta ABC: \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, AC = 12 \text{ متر}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 40^\circ} \Rightarrow AB = \frac{12 \times \sin 40^\circ}{\sin 30^\circ} = 17.2 \text{ متر}$$





٦) في  $\Delta$  ا ب د يكون  $\frac{ا ب}{٢٠ م} = \frac{٩٠}{٢٠ م}$

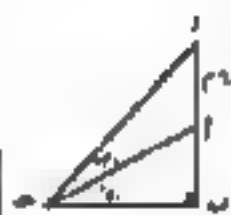
ا ب =  $\frac{٩٠}{٢٠ م} \times ٢٠ م = ٩٠ م$

في  $\Delta$  ا ب د يكون

$\frac{ا ب}{٩٠ م} = \frac{٩٠}{٩٠ م}$

ا ب =  $\frac{٩٠}{٩٠ م} \times ٩٠ م = ٩٠ م$

ا ب (ارتفاع التل) = ٢٧ متر



٧) في  $\Delta$  ا ب د:

ا ب (ب) =  $٣٧'٩٠$  و ا ب (ب) =  $٣٧'٩٠$

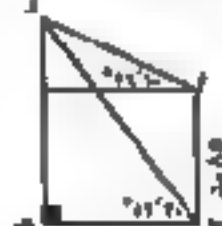
$\frac{ا ب}{٣٧'٩٠ م} = \frac{٨٥}{٣٧'٩٠ م}$

ا ب =  $\frac{٨٥}{٣٧'٩٠ م} \times ٣٧'٩٠ م$

ا ب = ٧٣ م

في  $\Delta$  ب د ج:

ج د ب (ب) =  $٥٣'٢٠$  و ج د ب (ب) = ١٣٧ متر



٨) في  $\Delta$  ا ب د  $\frac{ا ب}{٣٠ م} = \frac{٩٠}{٦٠ م}$

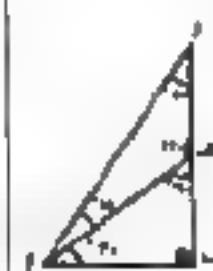
ا ب =  $\frac{٩٠}{٦٠ م} \times ٣٠ م$

ا ب = ٤٥ م

علما ان (ب د) = ٤٥ م

ا ب د = ٩٠ م

ب د ج (المسافة التي يجب قطعها) =  $٩٠ م - ٤٥ م = ٤٥ م$



٩) ا ب =  $٣٠ م \times ٢ = ٦٠ م$  و ا ب (ب) = ٢٥ م

$\frac{ا ب}{٢٥ م} = \frac{٦٠}{٢٥ م}$

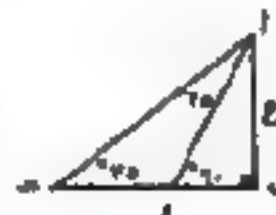
ا ب =  $\frac{٦٠}{٢٥ م} \times ٢٥ م$

ا ب = ٦٠ م

ا ب = ٦٠ م

ا ب =  $\frac{٦٠}{٢٥ م} \times ٢٥ م$

ا ب = ٦٠ م



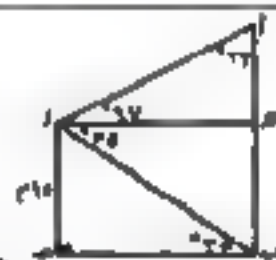
١٠) في  $\Delta$  ا ب د:

ا ب (ب) = ٢٥ م

$\frac{ا ب}{٢٥ م} = \frac{٩٠}{٢٥ م}$

ا ب =  $\frac{٩٠}{٢٥ م} \times ٢٥ م$

ا ب = ٩٠ م



ا ب =  $\frac{٩٠ م}{٢٥ م} \times ٢٥ م = ٩٠ م$

في  $\Delta$  ا ب د:

ا ب (ب) =  $٩٠ م - ٢٥ م = ٦٥ م$

ا ب (ب) =  $٩٠ م - ٢٥ م = ٦٥ م$

ا ب =  $\frac{٩٠ م}{٢٥ م} \times ٦٥ م$

ا ب =  $\frac{٩٠ م}{٢٥ م} \times ٦٥ م$

في  $\Delta$  ا ب د:



ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

في  $\Delta$  ا ب د:

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

في  $\Delta$  ا ب د:



ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

في  $\Delta$  ا ب د:

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

ا ب (ب) =  $\frac{٩٠}{٦٥ م}$

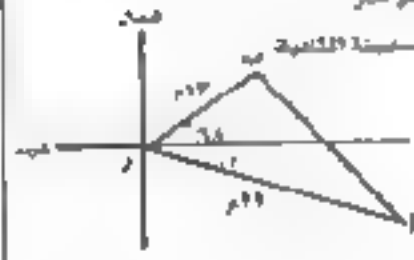






٢٦) المسافة التي قطعها المصطفي من المصطفي الثاني

بعد ساعتين = ٣٥ كيلو متر



المسافة التي قطعها المصطفي الثاني  
بعد ساعتين = ٣٥ كيلو متر

$$\cos(120^\circ) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$-0.5 = \frac{35^2 + 35^2 - BC^2}{2 \cdot 35 \cdot 35}$$

$$BC = 35\sqrt{3} \approx 606.22 \text{ م}$$

وهي المسافة بين المصطفيين بعد ساعتين من لحظة انحرافهما معاً

٢٧) السرعة المتوسطة = المسافة المقطوعة / الزمن



المسافة المقطوعة = السرعة المتوسطة x الزمن

$$BC = 3 \times 10 = 30 \text{ كم}$$

$$AB = 2 \times 8 = 16 \text{ كم}$$

$$\cos(120^\circ) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$75^2 = 16^2 + 30^2 - 2 \cdot 16 \cdot 30 \cdot \cos(\theta)$$

في المثلث A ب هـ بتطبيق قاعدة جيب التمام

$$75^2 = 16^2 + 30^2 - 2 \cdot 16 \cdot 30 \cdot \cos(\theta)$$

$$\theta = 154.4^\circ$$

$$\cos(120^\circ) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$AB = 10 \times 2.24 = 22.4 \text{ م}$$

$$BC = 10 \times 2.8 = 28 \text{ م}$$



في المثلث ا ب جـ

$$\cos(120^\circ) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$-0.5 = \frac{10^2 + 10^2 - BC^2}{2 \cdot 10 \cdot 10}$$

$$BC = 10\sqrt{3} \approx 17.32 \text{ م}$$



$$\frac{10}{\sin(30^\circ)} = \frac{BC}{\sin(120^\circ)}$$

$$BC = 17.32 \text{ م}$$

٢٨)



يفرض أن ارتفاع الطائرة هو هـ

$$\cos(92^\circ) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

في المثلث ا ب جـ

$$\frac{3000}{\sin(92^\circ)} = \frac{AB}{\sin(30^\circ)}$$

$$AB = \frac{3000 \cdot \sin(30^\circ)}{\sin(92^\circ)} = 1500 \text{ م}$$

$$\frac{AB}{\sin(30^\circ)} = \frac{BC}{\sin(30^\circ)}$$

$$BC = 1500 \text{ م}$$

$$BC = \frac{1500 \cdot \sin(92^\circ)}{\sin(30^\circ)} = 3000 \text{ م}$$

٢٩)



$$\cos(120^\circ) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

في المثلث ا ب جـ

$$\frac{AB}{\sin(30^\circ)} = \frac{BC}{\sin(30^\circ)}$$

$$BC = 10 \text{ م}$$





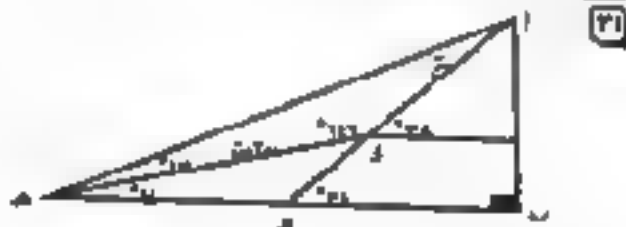
$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{100}{\sin 109^\circ}$$

$$AB = \frac{100 \times \sin 12^\circ}{\sin 109^\circ} = 28.11 \text{ متر}$$

في  $\Delta ABC$  :  
 $\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$

$$\frac{28.11}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$AC = \frac{28.11 \times \sin 109^\circ}{\sin 12^\circ} = 139.25 \text{ متر}$$



في  $\Delta ABC$  :

$$12^\circ = 109^\circ - 87^\circ = (\angle B)$$

زاوية  $\angle B$  خارجة عن  $\Delta ABC$

$$12^\circ = 87^\circ - 75^\circ = (\angle C)$$

$$109^\circ = (12^\circ + 87^\circ) = \angle A$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$AB = \frac{139.25 \times \sin 12^\circ}{\sin 109^\circ} = 28.11$$

$$\frac{AB}{\sin 12^\circ} = \frac{AC}{\sin 109^\circ}$$

$$AB = \frac{AC \times \sin 109^\circ}{\sin 12^\circ} = 139.25$$

بالتعويض من (1) في (2)

$$AB = \frac{139.25 \times \sin 109^\circ}{\sin 12^\circ} = 139.25$$

22) بفرض أن قمة البرج  $A$  تبعد 100 متر

في  $\Delta ABC$  :

$$\frac{AB}{\sin 10^\circ} = \frac{100}{\sin 70^\circ}$$

$$AB = \frac{100 \times \sin 10^\circ}{\sin 70^\circ} = 17.1$$

$$AB = \frac{100 \times \sin 10^\circ}{\sin 70^\circ} = 17.1$$

في  $\Delta ABC$  :

$$\frac{AB}{\sin 10^\circ} = \frac{AC}{\sin 70^\circ}$$

$$AC = \frac{AB \times \sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} = 95.72$$



$$AB = \frac{100 \times \sin 10^\circ}{\sin 70^\circ} = 17.1$$

$$AC = \frac{AB \times \sin 70^\circ}{\sin 10^\circ} = 95.72$$

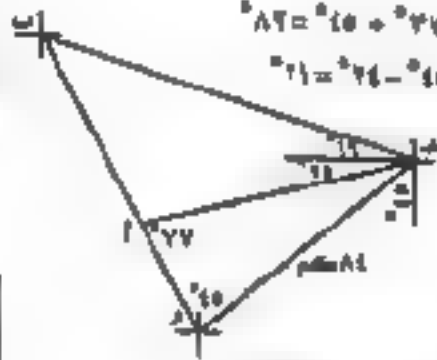
23) وحدة المسافة التي تحركتها السفينة خلال 3 ساعات

$$AB = 28 \times 3 = 84 \text{ كم}$$

في  $\Delta ABC$  :

$$84^\circ = 40^\circ + 44^\circ = (\angle B)$$

$$44^\circ = 84^\circ - 40^\circ = (\angle C)$$



$$36^\circ = (84^\circ + 44^\circ) - 100^\circ = (\angle A)$$

$$\frac{AB}{\sin 36^\circ} = \frac{AC}{\sin 84^\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin 36^\circ} = \frac{100}{\sin 84^\circ}$$

$$AB = \frac{100 \times \sin 84^\circ}{\sin 36^\circ} = 168.1$$

في  $\Delta ABC$  :

$$36^\circ = 40^\circ + 44^\circ = (\angle B)$$

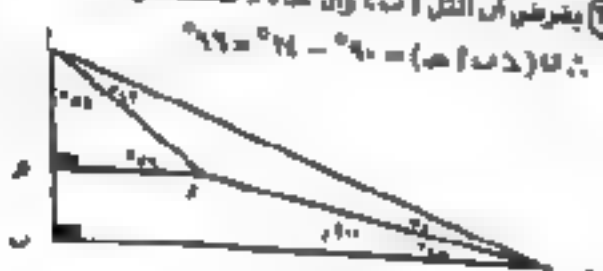
$$44^\circ = 84^\circ - 40^\circ = (\angle C)$$

$$\frac{AB}{\sin 36^\circ} = \frac{AC}{\sin 84^\circ}$$

$$AB = \frac{100 \times \sin 84^\circ}{\sin 36^\circ} = 168.1$$

24) بفرض أن القل  $A$  تبعد 100 متر

$$44^\circ = 84^\circ - 40^\circ = (\angle C)$$



$$70.72 = 100 \times \sin 44^\circ = (\angle B)$$

$$44^\circ = 84^\circ - 40^\circ = (\angle C)$$

في  $\Delta ABC$  :

$$100 = (44^\circ + 46^\circ) = \angle A$$



المسافة بين البرجين = 5.8 + 1.4 = 7.2 متر

$$^{\circ}A = ^{\circ}(1) + ^{\circ}(2) + ^{\circ}(3) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ}$$

بفرض أن النقطتين المائتين هما ب و ج وبداية حرجية

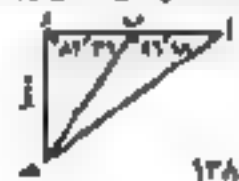
$$\begin{aligned} ^{\circ}A &= ^{\circ}(1) + ^{\circ}(2) + ^{\circ}(3) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ} \\ ^{\circ}B &= ^{\circ}(4) + ^{\circ}(5) + ^{\circ}(6) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} \\ \frac{AB}{\sin 10.72} &= \frac{AC}{\sin 13.1} \\ AB &= \frac{\sin 10.72}{\sin 13.1} \times AC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin 10.72} &= \frac{AC}{\sin 13.1} \\ AB &= \frac{\sin 10.72}{\sin 13.1} \times AC \end{aligned}$$

بفرض أن المسافة هو ه وموقع الطائرة هي الضربين (أ)



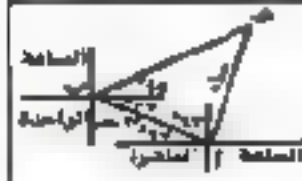
$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} \\ \frac{AB}{\sin 10.72} &= \frac{AC}{\sin 13.1} \\ AB &= \frac{\sin 10.72}{\sin 13.1} \times AC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ^{\circ}A &= ^{\circ}(1) + ^{\circ}(2) + ^{\circ}(3) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ} \\ ^{\circ}B &= ^{\circ}(4) + ^{\circ}(5) + ^{\circ}(6) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} \\ \frac{AB}{\sin 10.72} &= \frac{AC}{\sin 13.1} \\ AB &= \frac{\sin 10.72}{\sin 13.1} \times AC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\sin C} &= \frac{AC}{\sin B} \\ \frac{AB}{\sin 10.72} &= \frac{AC}{\sin 13.1} \\ AB &= \frac{\sin 10.72}{\sin 13.1} \times AC \end{aligned}$$

بفرض أن موقع السفينة عند الساعة العاشرة هو أ وموقعها الساعة الواحدة هو ب وموقع الفئرو هو ج بعد 3 ساعات



تسجل المسافة المسجلة = 25 = 3 + 22 متر

$$^{\circ}A = ^{\circ}(1) + ^{\circ}(2) + ^{\circ}(3) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ}$$

$$^{\circ}B = ^{\circ}(4) + ^{\circ}(5) + ^{\circ}(6) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ}$$

$$^{\circ}C = ^{\circ}(7) + ^{\circ}(8) + ^{\circ}(9) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ}$$

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

بفرض أن طول السهم = ب و ج



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

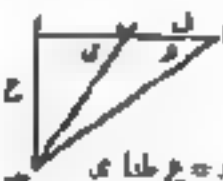
$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

بفرض أن الاتجاه هو ج



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

(معايير (2)) على السؤال الثانية لوضع أو فترة القياس (أ)

$$^{\circ}A = ^{\circ}(1) + ^{\circ}(2) + ^{\circ}(3) = 10.72 + 13.1 = 23.82^{\circ}$$



$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$

$$\frac{AB}{\sin 10.72} = \frac{AC}{\sin 13.1}$$



$$\sqrt{3} - 2 \text{ ②} \quad 1 \text{ ③} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ④}$$

$$2 - \sqrt{3} \text{ ⑤} \quad \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} \text{ ⑥}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 90^\circ \text{ م} = (90^\circ + 90^\circ) \text{ م} \text{ ① ②}$$

$$\frac{1}{2} = 90^\circ \text{ م} = (90^\circ + 90^\circ) \text{ م} \text{ ③}$$

$$\frac{1}{2} = 90^\circ \text{ م} = (90^\circ + 90^\circ) \text{ م} \text{ ④}$$

$$\frac{1}{2} = 90^\circ \text{ م} = (90^\circ + 90^\circ) \text{ م} \text{ ⑤}$$

$$1 = 90^\circ \text{ م} = (90^\circ + 90^\circ) \text{ م} \text{ ⑥}$$

$$1 = 90^\circ \text{ م} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ} = \frac{(90^\circ + 90^\circ)}{(90^\circ + 90^\circ)} \text{ م} \text{ ⑦}$$

$$(90^\circ + 90^\circ) \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ⑧}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} + 90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ⑨}$$

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ⑩}$$

$$(90^\circ - 90^\circ) \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ⑪}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} + 90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ⑫}$$

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ⑬}$$

$$(90^\circ + 90^\circ) \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ⑭}$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{90^\circ \text{ م} + 90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م} + 90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ⑮}$$

$$\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 1 \text{ ⑯}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \text{ م} = \frac{\pi}{2} \text{ م} \text{ ⑰}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ م} \times \frac{\pi}{2} \text{ م} - \frac{\pi}{2} \text{ م} \times \frac{\pi}{2} \text{ م} = 0 \text{ ⑱}$$

$$\frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ ⑲}$$

$$(90^\circ + 90^\circ) \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ⑳}$$

$$(90^\circ + 90^\circ) \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉑}$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ م} = \left[\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - 1\right] \text{ م} = \frac{\pi}{2} \text{ م} \text{ ㉒}$$

$$90^\circ \text{ م} + 90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} - [90^\circ \text{ م} - 90^\circ \text{ م}] \text{ ㉓}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉔}$$

$$90^\circ \text{ م} + 90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} - [90^\circ \text{ م} - 90^\circ \text{ م}] \text{ ㉕}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉖}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉗}$$

$$1 = \frac{2+2}{2-2} = \frac{2+2}{2-2} = (2+2) \text{ م} \text{ ㉘ ㉙}$$

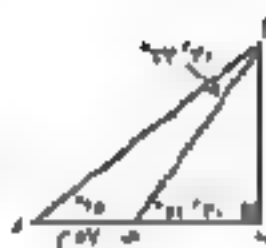
$$1 = \frac{2-2}{2+2} = \frac{2-2}{2+2} = (2-2) \text{ م} \text{ ㉚}$$

$$(2+2) \text{ م} \text{ ㉛}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉜}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉝}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉞}$$



$$\frac{1}{2} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ㉟}$$

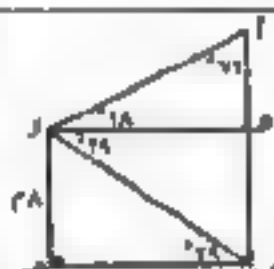
$$90^\circ \text{ م} = \frac{90^\circ \text{ م} \times 90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊱}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊲}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ㊳}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ㊴}$$

$$90^\circ \text{ م} = \frac{90^\circ \text{ م} \times 90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊵}$$



$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} = (1+1) \text{ م} \text{ ㊶}$$

$$90^\circ \text{ م} = (1+1) \text{ م} = 2 \text{ م} \text{ ㊷}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊸}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ㊹}$$

$$90^\circ \text{ م} = \frac{90^\circ \text{ م} \times 90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊺}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊻}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ㊼}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ㊽}$$

$$90^\circ \text{ م} = \frac{90^\circ \text{ م} \times 90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊾}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㊿}$$

$$(90^\circ - 90^\circ) \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉑}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉒}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉓}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉔}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{90^\circ \text{ م}}{90^\circ \text{ م}} = 1 \text{ ㉕}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉖}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉗}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉘}$$

$$90^\circ \text{ م} = 90^\circ \text{ م} \text{ ㉙}$$



④ إيجاد ظل  $(\alpha + \beta)$  توجد أولاً ظل  $(\alpha + \beta)$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - 1}$$

$$\frac{4}{3} = \tan (\alpha + \beta)$$

⑤ هنا  $\frac{4}{3} = \tan$  ، هنا  $\frac{4}{3} = \tan$

$$\tan (\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\tan (\alpha + \beta) = \tan \alpha + \tan \beta$$

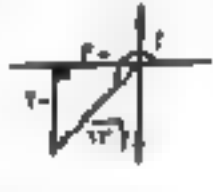
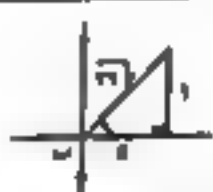
$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

⑥ هنا  $(\alpha - \beta) = \tan$  ، هنا  $(\alpha - \beta) = \tan$

$$\frac{4}{3} = \left( \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \right) = \left( \frac{3}{3} \right) = 1$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$



$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$1 = \frac{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} - 1} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta - 1} = \tan (\alpha - \beta)$$

$$\tan (\alpha - \beta) = \tan \alpha - \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\tan (\alpha - \beta) = \tan \alpha - \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{4}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$1 = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} - 1} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta - 1} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$1 = \frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} - 1} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta - 1} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$1 = \tan (\alpha + \beta)$$

⑦ إذا تربع الثاني  $\frac{4}{3} = \tan$  ، هنا  $\frac{4}{3} = \tan$



$$\frac{4}{3} = \tan \alpha$$

$$\frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta - 1} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$\frac{\frac{4}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} \times \frac{1}{3} - 1} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$\frac{5}{3} = \tan (\alpha + \beta)$$

$$\frac{5}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

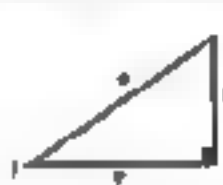
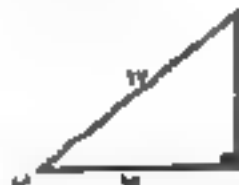
$$\frac{5}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

⑧ إذا تربعان في التربع الأول



$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$

$$\frac{4}{3} = \tan \alpha , \frac{1}{3} = \tan \beta$$



$$\begin{aligned} \text{مأ} (u-1) &= \text{مأ} f \text{ مأ} - \text{مأ} f \text{ مأ} \\ \frac{17}{12} &= \frac{8}{12} \times \left(\frac{5}{8}\right) - \frac{17}{12} \times \frac{7}{8} = \\ \frac{17}{12} &= \frac{8}{12} \times \frac{7}{8} + \frac{17}{12} \times \frac{5}{8} = (u-1) \text{ مأ} \end{aligned}$$

$$\frac{8}{8} = 1 \text{ مأ} \quad \& \quad \frac{7}{8} = 1 \text{ مأ} \quad (7)$$

$$\frac{17}{12} = u \text{ مأ} \therefore \quad \frac{8}{12} = u \text{ مأ} \therefore$$

$$(u+1) \text{ مأ} = [(u+1) \text{ مأ}] \text{ مأ} = \text{مأ}$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} + \text{مأ} f \text{ مأ} =$$

$$\frac{17}{12} = \frac{17}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{8} =$$

$$(u+1) \text{ مأ} = \text{مأ} f \text{ مأ} - u \text{ مأ} f \text{ مأ} \quad (8)$$

$$\frac{10}{12} \times \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7 \times 10 - 1}{12}$$

$$[(u+1) \text{ مأ} = \text{مأ}] \text{ مأ} = \text{مأ} \text{ مأ} \quad \frac{1 - 7 \times 10}{12} = (u+1) \text{ مأ} =$$

$$^{\circ} 91 \text{ مأ} = (^{\circ} 21 \times 70 + ^{\circ} 19 \times 30) \text{ مأ} \quad (9)$$

$$^{\circ} 77 \text{ مأ} = \left(\frac{70}{2} + \frac{30}{2}\right) \text{ مأ} = (10)$$

$$\frac{7}{8} \text{ مأ} = \left(1 - \frac{7}{8} + 1 + \frac{7}{8}\right) \text{ مأ} = (11)$$

$$\frac{1}{2} = ^{\circ} 91 \text{ مأ} = (^{\circ} 10 - ^{\circ} 70) \text{ مأ} = (12)$$

$$^{\circ} 180 \text{ مأ} = (^{\circ} 91 + ^{\circ} 19) \text{ مأ} = (13)$$

$$^{\circ} 31 \text{ مأ} = ^{\circ} 31 - \text{مأ} = (^{\circ} 20 - ^{\circ} 10) \text{ مأ} = (14)$$

$$\frac{7}{8} \text{ مأ} = \left(\frac{70}{12} + \frac{30}{4}\right) \text{ مأ} = (15)$$

$$^{\circ} 10 \text{ مأ} = (^{\circ} 10 + ^{\circ} 30) \text{ مأ} = (16)$$

$$^{\circ} 00 \text{ مأ} = (^{\circ} 30 - ) \text{ مأ} = (17)$$

$$^{\circ} 00 \text{ مأ} (^{\circ} 30 - ) \text{ مأ} - ^{\circ} 00 \text{ مأ} (^{\circ} 30 - ) \text{ مأ} =$$

$$^{\circ} 91 \text{ مأ} = |(^{\circ} 30 - ) - ^{\circ} 00| \text{ مأ} =$$

$$^{\circ} 70 \text{ مأ} ^{\circ} 70 \text{ مأ} + ^{\circ} 70 \text{ مأ} ^{\circ} 70 \text{ مأ} =$$

$$^{\circ} 91 \text{ مأ} = (^{\circ} 70 + ^{\circ} 70) \text{ مأ} =$$

$$r = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1.5}{-0.5} = -3 \quad (18)$$

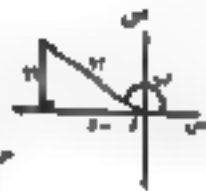
$$^{\circ} 10 \text{ مأ} = 0 \quad ^{\circ} 30 \text{ مأ} = (^{\circ} 0 - ) \text{ مأ} \quad (19)$$

$$^{\circ} 70 = \text{مأ} \quad ^{\circ} 30 = \text{مأ} \quad \text{مأ} = \text{مأ}$$

$$^{\circ} 190 = \text{مأ} \quad ^{\circ} 10 = \text{مأ} \quad \text{مأ} = \text{مأ}$$

$$^{\circ} 330 \text{ مأ} = \text{مأ} \quad ^{\circ} 30 \text{ مأ} = \text{مأ} \quad \text{مأ} = \text{مأ} \quad (20)$$

$$^{\circ} 330 = \text{مأ} \quad \& \quad ^{\circ} 30 = \text{مأ}$$



$$\frac{8}{12} = u \text{ مأ} \quad \frac{17}{12} = u \text{ مأ} \quad \frac{10}{12} = 1 \text{ مأ} \quad \frac{A}{12} = 1 \text{ مأ}$$

$$\frac{7}{8} = u \text{ مأ}$$

$$\frac{A}{12} = 1 \text{ مأ}$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} + \text{مأ} f \text{ مأ} = (u-1) \text{ مأ} \quad (21)$$

$$\frac{17}{12} = \frac{17}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{10}{12} =$$

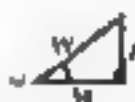
$$\text{مأ} f \text{ مأ} + \text{مأ} f \text{ مأ} = (u+1) \text{ مأ} \quad (22)$$

$$\frac{10}{12} = \frac{17}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{8}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{A}{12} =$$

$$\frac{(\frac{17}{8}) - \frac{A}{12}}{\frac{17}{8} \times \frac{A}{12} + 1} = \frac{u \text{ مأ} - 1 \text{ مأ}}{u \text{ مأ} + 1} = (u-1) \text{ مأ} \quad (23)$$

$$\frac{17}{12} =$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} + \text{مأ} f \text{ مأ} = (u+1) \text{ مأ} \quad (24)$$



$$\frac{A}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{10}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8} = \frac{17}{12}$$

$$\text{مأ} = \text{مأ} = (u+1) \text{ مأ} \quad (25)$$

$$(\text{مأ} f \text{ مأ} - \text{مأ} f \text{ مأ}) =$$

$$\frac{7}{12} = \left(\frac{A}{12} \times \frac{7}{8} - \frac{10}{12} \times \frac{1}{2}\right) =$$

$$\frac{7}{8} = 1 \text{ مأ} \quad \& \quad \frac{1}{2} = 1 \text{ مأ} \quad (26)$$

$$\frac{17}{12} = u \text{ مأ} \quad \& \quad \frac{8}{12} = u \text{ مأ}$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} - \text{مأ} f \text{ مأ} = (u-1) \text{ مأ}$$

$$\frac{8}{12} \times \left(\frac{1}{2}\right) - \frac{17}{12} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{8} =$$

$$\frac{8}{12} = \frac{7}{8} + \frac{7}{8} =$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} - \text{مأ} f \text{ مأ} = (u+1) \text{ مأ}$$

$$\frac{8}{12} = \left(\frac{7}{8}\right) - \frac{17}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} =$$

$$\frac{17}{12} = \frac{10}{12} + \frac{10}{12} =$$

$$\frac{7}{8} = 1 \text{ مأ} \quad \& \quad \frac{1}{2} = 1 \text{ مأ} \quad (27)$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} = \text{مأ} f \text{ مأ} \quad \& \quad \frac{1}{2} = 1 \text{ مأ}$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} = \text{مأ} f \text{ مأ} \quad \& \quad \frac{17}{12} = \text{مأ}$$

$$\text{مأ} f \text{ مأ} = \text{مأ} f \text{ مأ} \quad \& \quad \frac{7}{12} = \text{مأ}$$



$$\textcircled{3} \text{ متا } (^{\circ} 2 + ^{\circ} 2) = \text{متا } 4$$

$$\text{متا } 10 = \text{متا } 30 \text{ من } 100 \text{ من } 100 = 100$$

$$\textcircled{4} \text{ متا } (100 - 10) = 90 \text{ متا } 100 = 9000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$\textcircled{5} \text{ المتعارف } = \text{متا } (100 - 10) = 90 \text{ متا } 100 = 9000$$

$$\frac{90}{100} = 0.9$$

∴ لا يتوقف على من

$$\textcircled{6} \text{ متا } (100 - 10) = 90 \text{ متا } 100 = 9000$$

∴ لا يتوقف على من

$$\textcircled{7} \text{ المتعارف } = \text{متا } (100 - 10) = 90 \text{ متا } 100 = 9000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$\textcircled{8} \text{ المتعارف } = \text{متا } (100 - 10) = 90 \text{ متا } 100 = 9000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$\textcircled{9} \text{ المتعارف } = \text{متا } (100 - 10) = 90 \text{ متا } 100 = 9000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$\textcircled{10} \text{ المتعارف } = \text{متا } (100 - 10) = 90 \text{ متا } 100 = 9000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$

$$10000 = 9000 + 1000$$







$$(3) \text{ (مقابل مقابل - مقابل مقابل)}$$

$$2 = (\text{مقابل مقابل} + \text{مقابل مقابل})$$

$$3 = \text{مقابل مقابل} - \text{مقابل مقابل}$$

$$2 = \text{مقابل مقابل} + \text{مقابل مقابل}$$

$$1 = \text{مقابل مقابل} - \text{مقابل مقابل}$$

$$\text{بالقسمة على 4 مقابل مقابل} \quad \therefore \text{طال مقابل} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \text{ الطرف الأيمن} = \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل}$$

$$= 1 + 2 = \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل}$$

$$= 2 + 2 = \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل}$$

$$= 2 + 2 = \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل} + \text{مقابل}$$

$$(3) \text{ طال} (1 + 2) = \frac{\text{طال} + \text{طال}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 1$$

$$130 = (13) \cdot 10 + (13) \cdot 10 = 130$$

$$(3) \text{ الطرف الأيمن} = \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{مقابل} - \text{مقابل} - \text{مقابل}$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$

$$(3) \text{ س} = \text{طال} = 70 = \text{طال} = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$$

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{10 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{10 + 10 + 10 + 10 + 10}{1 - 1 - 1 - 1 - 1} = 130$$

$$130 = 130 = 130 = 130 = 130$$

$$= \text{صفر}$$

$$(3) \text{ ت} = \frac{10}{2} = 5$$

$$1 = \text{ت} = \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$(3) \text{ س} = \frac{10}{2} = 5$$

$$(2) \text{ س} = \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$= \frac{10}{2} = 5$$

$$(3) \text{ التقدير} = \text{س} = (10 + 10) = 20$$

$$= 20 = 20 = 20 = 20 = 20$$

$$(4) \text{ التقدير} = \text{س} = (20 - 10) = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(5) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(6) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(7) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(8) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(9) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(10) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(11) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(12) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(13) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(14) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(15) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(16) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(17) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$(18) \text{ س} = 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$

$$= 10 = 10 = 10 = 10 = 10$$





$$90 = \text{س} + \text{ب} + 1 \quad (1)$$

$$\text{س} = 90 - (\text{ب} + 1)$$

$$\text{ط} = \text{س} = 90 - (\text{ب} + 1)$$

$$\frac{27}{18} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - 1} = \frac{\text{ط} + 1}{\text{ط} - 1} = (\text{ب} + 1) \text{ ط} =$$

$$9 = \sqrt{1+1} = 2 \quad (2)$$

$$10 = \sqrt{1+9} = 3$$

$$(\text{ب} + 1) \text{ ط} + (\text{ب} + 1) \text{ ط} = (\text{ب} + 1) \text{ ط}$$

$$\alpha + \theta = \text{س}$$

$$\alpha \text{ ما س} = \theta \text{ ما س} = (\alpha + \theta) \text{ ما س}$$

$$\frac{27}{18} = \frac{1}{17} \times \frac{1}{8} + \frac{10}{17} \times \frac{7}{8} =$$

$$\frac{3}{4} \quad (3) \text{ ما س} + \text{ما س} = 1$$

$$\text{ط} = 30 \text{ ما س} + \text{ما س} = 1$$

$$\frac{30 \text{ ما س}}{30 \text{ ما س}} = 1 \text{ ما س} + \text{ما س} = 1$$

$$\text{ما س} = 30 \text{ ما س} + \text{ما س} = 30 \text{ ما س} + \text{ما س} = 30 \text{ ما س}$$

$$\frac{3}{4} = (\text{س} - 30)$$

$$\frac{3}{4} \times 4 = \frac{3}{4} \times 4 = (\text{س} - 30)$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\frac{3}{4} = \text{س} - 30$$

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1.41$$

$$\sqrt{1+9} = \sqrt{10} = 3.16$$

$$(\text{ب} + 1) \text{ ط} + (\text{ب} + 1) \text{ ط} = (\text{ب} + 1) \text{ ط}$$

$$[(\text{ب} + 1) \text{ ط} - 90] + [(\text{ب} + 1) \text{ ط} - 90] =$$

$$(\text{ب} + 1) \text{ ط} + (\text{ب} + 1) \text{ ط} =$$

$$\text{س} = 1 + \text{ب}$$

$$\text{ما س} = (\text{ب} + 1)$$

$$\text{ما س} = (\text{ب} + 1)$$

$$\frac{27}{18} = \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$$

$$(4)$$

$$\text{بعض ان طول طلع لربع} = 1$$

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2} = 1.41$$

$$\text{س} = 1 + \theta$$

$$\theta = 1 - \text{س}$$

$$\theta = \text{ط} - (1 - \text{س})$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} - 1 =$$

$$\frac{1}{4} = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 =$$

$$\text{ط} = 1.41 = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 =$$

$$\frac{1-1}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12} =$$

$$(5)$$



نرمال

بعض ان طول طلع لربع

بعض ان طول طلع لربع

$$(\text{ب} + 1) \text{ ط} + (\text{ب} + 1) \text{ ط} = (\text{ب} + 1) \text{ ط}$$

$$\text{س} = 1 + \theta$$

$$\text{ما س} = (\text{ب} + 1)$$

$$\frac{27}{18} = \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4} - 1 =$$

$$\frac{1}{4} = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 =$$

$$\text{ط} = 1.41 = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 =$$

$$\frac{1-1}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12} =$$

$$\frac{1}{4} = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 =$$

$$\text{ط} = 1.41 = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 =$$

$$\frac{1-1}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{12} =$$

$$\frac{1}{4} = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 = \text{ط} - 1 =$$









$$v_0 = v_1 = v_2 = (12) \text{ م} \quad (1)$$

في  $\Delta$  ب د ج:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{10}{10}$$

$$v_0 = \frac{10 \times 10}{10} = 10 \text{ م}$$

في  $\Delta$  ب د ج:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{10}{10}$$

$$v_1 = \frac{10 \times 10}{10} = 10 \text{ م}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (3)$$

$$1 = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{v_4} \quad (4)$$

$$v = \frac{1 \times 1}{1} = \frac{1 \times 1}{1} = 1 \text{ م}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{1} = 2 = 1 \text{ م} \quad (5)$$



في  $\Delta$  ب د ج:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1 \text{ م}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (6)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (7)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (8)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (9)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (10)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (11)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (12)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (13)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (14)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (15)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (16)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (17)$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} \quad (18)$$

$$(19) \text{ (منا من منا من - منا من منا من)}$$

$$= \text{منا من منا من - منا من منا من}$$

$$= \text{منا من منا من - منا من منا من}$$

$$= \text{منا من منا من - منا من منا من}$$

$$= \text{منا من منا من - منا من منا من}$$

$$= \text{منا من منا من}$$

$$= \text{منا من منا من - منا من منا من}$$

$$= \text{منا من منا من}$$

$$\text{في } \Delta \text{ ب د ج:}$$



$$12 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3} = \frac{1}{v_4}$$

$$\text{على التوالي المثبتة نصف الترتيب}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3}$$

$$= \frac{1}{v_4}$$



$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3}$$

$$= \frac{1}{v_4}$$

$$= \frac{1}{v_5}$$

$$= \frac{1}{v_6}$$

$$= \frac{1}{v_7}$$

$$= \frac{1}{v_8}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3}$$

$$= \frac{1}{v_4}$$

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{v_2} = \frac{1}{v_3}$$

$$= \frac{1}{v_4}$$

$$= \frac{1}{v_5}$$

$$= \frac{1}{v_6}$$

$$= \frac{1}{v_7}$$











$$\frac{12}{10} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + 1} = \frac{2(3-1)}{3(3+1)} = \frac{2(2)}{3(4)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + 1 = \frac{3}{25} + 1 = \frac{3+25}{25} = \frac{28}{25}$$

$$\frac{12}{10} = \frac{2(2)}{3(4)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



$$\frac{12}{10} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5} \times \frac{1}{5} + 1} = \frac{2(3-1)}{3(3+1)} = \frac{2(2)}{3(4)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{12}{10} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(18) : تقع في الربع الأول :

$$\frac{3}{5} = 1 \text{ م } \quad \frac{1}{5} = 1 \text{ م } \quad \frac{3}{5} = 1 \text{ م } \quad \frac{1}{5} = 1 \text{ م}$$

تقع في الربع الثاني :

$$\frac{3}{5} = 1 \text{ م } \quad \frac{1}{5} = 1 \text{ م}$$

$$\frac{3}{5} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \quad \frac{1}{5} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{125} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{25} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{125}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{125} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{625} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{125} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{625}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{625} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{3125} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{625} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3125}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{3125} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15625} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{3125} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15625}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{15625} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{78125} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{15625} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{78125}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{78125} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{390625} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{78125} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{390625}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{390625} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{1953125} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{390625} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{1953125}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{1953125} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{9765625} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{1953125} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{9765625}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{9765625} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{48828125} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{9765625} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{48828125}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{48828125} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{244140625} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{48828125} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{244140625}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{244140625} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{1220703125} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{244140625} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{1220703125}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{4}{1220703125} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{6103515625} \quad \frac{1}{5} = \frac{2}{1220703125} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{6103515625}$$

المسافة = 10 م

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{1}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\frac{3}{5} = \frac{10}{10} = 1$$







$$\textcircled{7} \text{ الطرف الأيمن} = 1 - \frac{1}{2} \times 2 \text{ حنا} 1 \times \frac{\text{حنا}}{\text{حنا}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \times 2 = 1 - 1 = 0$$

$$\textcircled{8} \text{ الطرف الأيمن} = \frac{\text{حنا}}{\text{حنا}} - \frac{\text{حنا}}{\text{حنا}}$$

$$= \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2} - \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2} = \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2} - \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2} = 0$$

$$= 0 \text{ حنا} 2 = \text{الطرف الأيسر}$$

$$\textcircled{9} \text{ الطرف الأيمن} = \text{حنا} 2 \text{ حنا} 2 + \text{حنا} 2 \text{ حنا} 2$$

$$= \frac{1}{\text{حنا} 2} + \frac{\text{حنا} 2}{\text{حنا} 2} = \frac{1 + \text{حنا} 2}{\text{حنا} 2}$$

$$= \frac{1 + 2 \text{ حنا}^2 - 1}{2 \text{ حنا}^2 - 1} = \frac{2 \text{ حنا}^2}{2 \text{ حنا}^2 - 1} = \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 - \frac{1}{2}}$$

$$= \text{حنا}^2 = \text{الأيسر}$$

$$\therefore \text{حنا}^2 = \text{حنا}^2 = \text{حنا}^2 + \text{حنا}^2 \text{ حنا}^2 \text{ حنا}^2 \text{ حنا}^2 = 10$$

$$\therefore \text{حنا}^2 = 10 = \text{حنا}^2 (2 \times 10) + \text{حنا}^2 (2 \times 10)$$

$$= \text{حنا}^2 = 20 + \text{حنا}^2 = 20 + 20 = 40$$

$$\textcircled{10} \text{ الطرف الأيسر} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1} \times \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2} = \frac{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^4}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{\text{حنا}^2 (1 - \text{حنا}^2)}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$= \frac{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^4}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{\text{حنا}^2 (1 - \text{حنا}^2)}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{\text{حنا}^2 (1 - \text{حنا}^2)}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$= 10 = \text{حنا}^2$$

$$\therefore \text{حنا}^2 = 10 = \frac{1 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$\text{حنا}^2 = 30 = \frac{1 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1} \therefore \frac{1 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{30}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$\textcircled{11} \text{ الطرف الأيمن} = \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2} = \frac{(\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2)(\text{حنا}^2 + \text{حنا}^2)}{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2}$$

$$= \text{حنا}^2 + \text{حنا}^2 = \text{الأيسر}$$

$$\textcircled{12} \text{ الطرف الأيمن} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \text{الطرف الأيسر}$$

$$\textcircled{13} \text{ الطرف الأيمن} = \frac{\text{حنا}^2 - 1}{\text{حنا}^2 - 1} = \frac{\text{حنا}^2 - 1}{\text{حنا}^2 - 1}$$

$$= \frac{\text{حنا}^2 - 1}{\text{حنا}^2 - 1} = \frac{\text{حنا}^2 - 1}{\text{حنا}^2 - 1} = \frac{\text{حنا}^2 - 1}{\text{حنا}^2 - 1}$$

$$\textcircled{14} \text{ الطرف الأيسر} = \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$= \frac{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$\text{حيث } 1 = \text{حنا}^2 + \text{حنا}^2 = \text{حنا}^2 + \text{حنا}^2 = \text{حنا}^2 + \text{حنا}^2 = \text{حنا}^2 + \text{حنا}^2$$

$$= \frac{(\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2)(\text{حنا}^2 + 1)}{(\text{حنا}^2 + 1)}$$

$$= \frac{\text{حنا}^2 - \text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1}$$

$$\text{بالتقسيم بسطاً ومقاماً على حنا}^2$$

$$= \frac{\frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2} - \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2}}{\frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\therefore \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 \text{ بوضع } 10 = 22 \times 30$$

$$\therefore \frac{\text{حنا}^2}{\text{حنا}^2 + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 \text{ حنا}^2 = 22 \times 30 = 660$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{15} \text{ الطرف الأيمن} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$= \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2} = \frac{1 - \text{حنا}^2}{1 - \text{حنا}^2}$$

$$\textcircled{16} \text{ الطرف الأيمن} = 1 + 2 \text{ حنا}^2 + 1 \text{ حنا}^2$$

$$= 1 + (1 + 2 \text{ حنا}^2) + 1 = 3 + 2 \text{ حنا}^2$$



$$(17) \text{ الطرف الأيمن } = 2 \text{ هنا } \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = 0$$

$$= 2 \text{ هنا } \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = 0 \Rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ هنا } (3 - 0) = 3 \Rightarrow 1 + 1 = 2 \text{ هنا } 3 = 1 + 2$$

$$(18) \text{ الطرف الأيسر } = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2} \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$\therefore \text{ هنا } 1 = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2} \text{ بوضع } 1 = 1$$

$$\text{ هنا } 1 = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2} = \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ هنا } 1 = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2} \text{ باءد } \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$\text{ هنا } 1 = \frac{1}{4} (1 + 1) = \frac{1}{2}$$

$$(19) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$(20) \text{ الطرف الأيمن } = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$= \frac{1 + 1}{1} = 2 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$(21) \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$(22) \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$(23) \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$(24) \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$(25) \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

$$1 \text{ هنا } 1 = 1 \text{ هنا } 1 = 1$$

حيث  $\pi \in \mathbb{R}$



$$\textcircled{1} \text{ جتا } x^2 - \text{جتا } x + 1 = 0$$

$$v = v' \{1 - \beta \cos \theta\} \quad \therefore \text{مثلاً } v = 0 \Rightarrow v' = \frac{v}{1 - \beta \cos \theta}$$

هنا  $\varphi$  من  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  (مختوف)  $(\varphi, \psi) = \int \varphi \psi$

$$\pi u = u - \frac{1}{2} \quad (7+)$$

١٠٧      ١٠٨

Παύλος

٢٠. اليوم من علي : ٢٢

$$T = \mu \rightarrow \mu \text{ مگر } T \rightarrow \mu \rightarrow T \text{ ہوتا ہے (۷)}$$

$$T_{\text{eff}} = \frac{1}{2} T_0 + \frac{1}{2} T_1$$

• 2014-2015

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) (1 + \cos \theta)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$$(\pi \circ \tau + \frac{\pi}{2})|_L = \sigma|_L$$

$$\pi_{\text{eff}} + \frac{\pi}{2} = \psi$$

1=4      6      1=4

$$\pi \tau < \pi \frac{17}{9} = 3\pi, \quad \frac{8}{9} = 3\pi$$

$$\frac{\pi_0}{\gamma} = \omega = \frac{1}{2} \quad \left( \pi_0 \gamma + \frac{\pi_0}{\gamma} \right) \omega = \omega = \frac{1}{2}$$

12-14

$$(\pi \cup \tau + \frac{\pi}{y}) \cup \dots \cup$$

$$\pi \cup \tau + \frac{\pi}{4} = \sigma$$

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

$$\frac{3}{4} = \pi \quad \pi \frac{3}{4} < \pi \frac{3}{2} = 3\pi$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \sqrt{2} + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln 2 \right) \sqrt{2} \quad (6)$$

$$\overline{Y} = \mu_Y \text{ bzw. } \overline{Y} = \left(\frac{U}{T}\right) T \text{ bzw.}$$

اسماء

$$4 \quad (\pi \omega + \frac{\pi^2}{4}) \lambda_0 = \omega - \lambda_0 \omega$$

$$(\pi_U + \frac{\pi_D}{T})u = s \quad u$$

$$K \cup I \leftarrow \frac{K \cup I}{p} \rightarrow K \cup I$$

$\frac{1}{2} \pi$        $\frac{1}{2} \pi$

1.  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$$x = 1 + \sqrt{5} \text{ 及 } x = 1 - \sqrt{5}$$

1-4574

$$(K_0 + \frac{K_1}{\gamma}) \leq \omega \leq K_0$$

$$(7+)$$

$$KUT + \frac{HF}{1} = 5-7$$

$$\pi \cup \frac{\pi \tau}{\theta} = \tau$$

١٣٤٢ ١ ١٣٤٢

$$\frac{16Y}{3} = 16 \quad \text{and} \quad \frac{16Y}{3} = 16$$

١٠٠٠



كسره  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

عند  $\pi = 0$  :  
 من  $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$  :  
 من  $\pi \frac{17}{4} < \pi \frac{17}{4}$  (مرفوض)  
 قيم من  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

أي ط  $\pi = 2 + \pi$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط موجبة هي شكل من التريجون الأول والثالث

في الربع الأول  $\pi = \frac{\pi}{4} + \pi$  (2+)

في الربع الثالث  $\pi = \frac{\pi}{4} + \pi$  (2+)

من  $\pi \frac{17}{4} = \frac{\pi}{4}$  :  
 قيم من  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

(2) ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

(ط من موجبة هي شكل من التريجون الأول والثالث)

في الربع الأول  $\pi = \frac{\pi}{4}$

في الربع الثالث  $\pi = \frac{\pi}{4} + \pi$

قيم من  $\frac{\pi}{4}$  التي تحقق المعادلة هي  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{5\pi}{4}$

(3) ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

(4) ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

كسره  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

عند  $\pi = 0$  :  
 من  $\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$  :  
 من  $\pi \frac{17}{4} < \pi \frac{17}{4}$  (مرفوض)

قيم من  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

أي ط  $\pi = 2 + \pi$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط موجبة هي شكل من التريجون الأول والثالث

في الربع الأول  $\pi = \frac{\pi}{4} + \pi$  (2+)

في الربع الثالث  $\pi = \frac{\pi}{4} + \pi$  (2+)

من  $\pi \frac{17}{4} = \frac{\pi}{4}$  :  
 قيم من  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

(2) ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

(ط من موجبة هي شكل من التريجون الأول والثالث)

في الربع الأول  $\pi = \frac{\pi}{4}$

في الربع الثالث  $\pi = \frac{\pi}{4} + \pi$

قيم من  $\frac{\pi}{4}$  التي تحقق المعادلة هي  $\frac{\pi}{4}$  و  $\frac{5\pi}{4}$

(3) ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

(4) ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$

ط  $\pi = 1 = 1$  ط من  $1 = 1$



$$(1) \text{ (4) } \frac{27 \text{ م}^3 \text{ م}^2}{3} = 9 \text{ م}^2$$

$$\frac{27 \text{ م}^3}{3} = 9 \text{ م}^2 \quad \frac{(27 \text{ م}^3 \text{ م}^2)}{3} = 9 \text{ م}^2$$

$$9 \text{ م}^2 = 9 \text{ م}^2 \quad \text{مجموع} = 11,7 \text{ م}^2$$

$$\frac{(27 \text{ م}^3 \text{ م}^2)}{9,8} = 2,74 \text{ م}^2$$

$$(1) \text{ (4) } 1 \text{ م}^2 = 1 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$\frac{1-2}{3} = 1 - \frac{2+2}{3} = 1 - \left( \frac{1+2}{3} \right) = 1 - \frac{3}{3} = 0$$

$$1 = 1 \text{ م}^2 + 1 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$1 = 1 \text{ م}^2 - 1 \text{ م}^2 = 0 \text{ م}^2$$

$$1 \text{ م}^2 = 1 \text{ م}^2 \quad 1 \text{ م}^2 = 1 \text{ م}^2$$

$$9 \text{ م}^2 = 9 \text{ م}^2 \quad 9 \text{ م}^2 = 9 \text{ م}^2$$

$$1 \text{ م}^2 = 1 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \text{ م}^2}{3 \text{ م}^2} = \frac{2}{3}$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$



$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2 \quad 2 \text{ م}^2 = 2 \text{ م}^2$$

$$1 \text{ م}^2 = 1 \text{ م}^2 \quad 1 \text{ م}^2 = 1 \text{ م}^2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$1 = 1$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1 \quad 1 = 1$$

$$1 = 1$$













في  $\Delta$  ا ب ج

$$13 = 5 + 12 = 17$$

$$12 = 12$$

$$15 = 15$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (5-12)(12-12)(15-12) = 18$$

في  $\Delta$  ب ج د

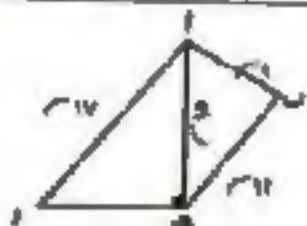
$$12 = 12$$

$$16 = 16 + 16 + 16 = 48$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (12-16)(16-16)(16-16) = 0$$

في الشكل الرباعي ا ب ج د

$$S_{\Delta} = 18 + 48 + 0 = 66$$



في  $\Delta$  ا ب ج

$$13 = 13 + 12 + 9 = 34$$

$$18 = 18$$

مساحة  $\Delta$  ا ب ج

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (13-18)(12-18)(9-18) = 18$$

في  $\Delta$  ا ب ج

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} (13-18)(18-18)(9-18) = 0$$

$$S_{\Delta} = 18 \times 18 \times \frac{1}{2} = 162$$

$$S_{\Delta} = 18 + 162 = 180$$

$$S_{\Delta} = 18 + 162 = 180$$

$$S_{\Delta} = 18 + 162 = 180$$

في  $\Delta$  ا ب ج

$$18 = 18 + 18 + 18 = 54$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$



في  $\Delta$  ا ب ج

$$S_{\Delta} = 18$$

$$(13-18)(12-18)(9-18) = 18$$

$$S_{\Delta} = 18$$

$$S_{\Delta} = 18$$

$$(13-18)(18-18)(9-18) = 0$$

$$S_{\Delta} = 18$$

$$S_{\Delta} = 18$$

$$(13-18)(12-18)(9-18) = 18$$

$$S_{\Delta} = 18$$

في  $\Delta$  ا ب ج

$$S_{\Delta} = 18$$

$$S_{\Delta} = 18 \times 18 \times \frac{1}{2} = 162$$

في  $\Delta$  ب ج د

$$S_{\Delta} = 18$$

$$18 = 18 + 18 + 18 = 54$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$

$$S_{\Delta} = 18 + 54 = 72$$



$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{(10-12)(8-12)(12-12)}{2} = 0$$

12 = ج

$$12 = \text{ج} \therefore 78 = 8 + 10 + 10 = \text{ج 7}$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{(8-12)(12-12)(12-12)}{2} = 0$$

$$\text{مساحة الشكل} = 78 + 78 + 12 = 168$$

1. الشكل ا ب هـ مربع

مساحة المربع ا ب هـ

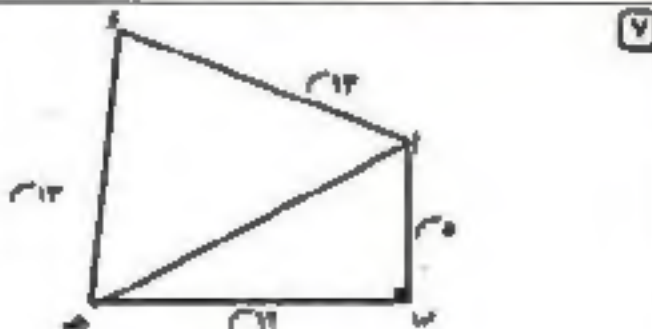
$$78 = 8 \times 8 =$$

$$12 = 8 - 12 = \text{ج 7}$$

مساحة \Delta ا ب هـ

$$78 = 12 \times 8 \times \frac{1}{2} =$$

$$\text{مساحة الشكل ا ب هـ} = 78 + 78 = 156$$



$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$$

$$12 = \sqrt{(12)^2 + (8)^2} = 16$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \times \frac{1}{2} = 36$$

$$\text{مساحة الشكل ا ب هـ} = 36 + 48 = 84$$



نسطح د ق د ب

1. الشكل ا ب هـ والمربع

$$10 = 8 \text{ د هـ} \therefore 10 = 8 \text{ د هـ}$$

$$78 = 10 - 31 = \text{ج 7}$$

$$78 = 10 \times 10 = \text{مساحة المربع}$$

$$78 = 12 \times 8 \times \frac{1}{2} = \text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ}$$

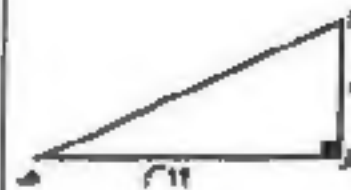
$$78 = 12 + 10 = \text{مساحة الشكل}$$

$$11 = \frac{8-12}{4} = \text{طول المساقين} \quad \text{9}$$

$$10 = \text{ج} \therefore 78 = 8 + 11 + 11 = \text{ج 7}$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{(8-10)(11-10)(11-10)}{2} = 0$$

$$78 =$$



2. الشكل ا ب هـ مستطيل

1. الشكل ا ب هـ مستطيل

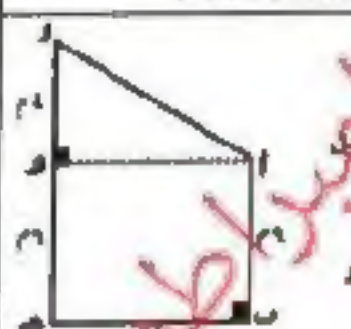
$$8 = 8 = \text{ج 7}$$

مساحة المستطيل ا ب هـ

$$78 = 8 \times 8 =$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$$

$$\text{مساحة الشكل} = 48 + 78 = 126$$



نسطح د ق د ب

1. الشكل ا ب هـ مستطيل

$$8 = 8 = \text{ج 7}$$

$$78 = 8 \times 8 = \text{مساحة المستطيل}$$

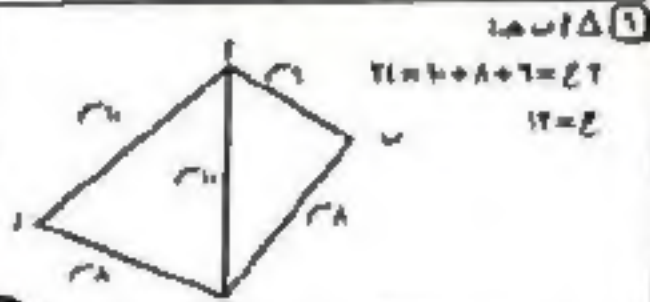
$$78 = \text{ج 7}$$

$$78 = 10 - 31 = \text{ج 7}$$

$$\text{مساحة } \Delta \text{ ا ب هـ} = \frac{(8-10)(11-10)(11-10)}{2} = 0$$

$$78 =$$

$$\text{مساحة الشكل} = 78 + 78 = 156$$



3. الشكل ا ب هـ

$$78 = 10 + 8 + 10 = \text{ج 7}$$

$$12 = \text{ج}$$



٦) نفرض أن الأطوال هي:  $ك ٧$  ،  $ك ٥$  ،  $ك ٣$  ك

محيط الحديقة = ٢٠٠

$$٢٠٠ = ك ٧ + ك ٥ + ك ٣$$

$$٢٠٠ = ك ١٥ \quad \therefore ك = ١٣٣$$

الأطوال هي: ١٤٠ ، ١٠٠ ، ٦٠

$$مساحة الحديقة = \frac{(١٤٠ - ١٠٠)(١٠٠ - ٦٠)(٦٠ - ١٤٠)}{٢} = ٢٥٩٨$$

$$= ٢٥٩٨ \text{ متر}^2$$

٧) نفرض أن الأطوال هي:

$$٢٤ \text{ سم} ، ٤٤ \text{ سم} ، ٣٤ \text{ سم} ، ٢٤ \text{ سم} ، ٤٤ \text{ سم}$$

$$٣٢ = ٢٤ + ٣٤ + ٤٤ + ٢٤ + ٤٤$$

$$٣٢ = ١٦٠ \quad \therefore ٢ = ١٦$$

الأطوال هي:

$$٨٤ ، ١٦٤ ، ١٦٤ ، ٨٤ ، ١٦٤$$

نصل  $٨٤$



$$مساحة المستطيل | ب ه د = ٨٤ \times ١٦٤ = ١٣٧٧٢$$

$\Delta$  ه د ه:

$$١٦ = ٤ + ١٢ + ١٢ = ٢٤ \quad \therefore ٨ = ٤$$

$$مساحة \Delta ه د ه = \frac{(٤ - ٨)(١٦ - ٨)(١٦ - ٨)}{٢} = ١١٢$$

$$= ١١٢$$

$$مساحة الشكل = ١١٢ + ١٣٧٧٢ = ١٣٨٨٤$$